

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zavod za telekomunikacije

MARIJO NIŽETIĆ

SEMINARSKI RAD

IZ KOLEGIJA

dr. sc. Petar Javor

LINEARNA ALGEBRA

bilješke s predavanja

šk. god. 1982/83

Teorija linearne algebre

radni materijal (NULTA verzija - 08.01.99 12:22)

Zagreb: siječanj, 1999.

Ispiti utorkom u 10^h

~~Ispr~~ na matematiku (II test) ETF

Pitanja na ispit:

1. Definicija vektorskog prostora
(primjene i ove u vezi toga)
2. Definicija linearnog operatora
(veza s matricama)
3. Karakteristične vrijednosti i
karakteristični vektor
4. Skalarni produkt.

Literatura:

1. S. Kurepa
Konacno dimenzionalni vektorski prostori
i primjene (T.K. 1976. II izdanje)
2. S. Kurepa
Uvod u linearnu algebru (Š.K. 1975.)
3. Mitrović, Mihailović, Vasić
Linearna algebra, polinomni, analitička
geometrija (G.K. 3gd. 1971.)
4. Tehnička enciklopedija (II i III tom)
5. FESB - Split Matematika IV
(vektori i matricni račun)
predavanja prof. Hris. Anton 1972.

Sadržaj

1. Uvodne definicije	1
2. Duplikacije i eliminacije	2
3. Pojam skupa	3
4. Osnovne linearni operacije	4
5. Pojam grupe	8
6. Brojevi (prirodni, cijeli, racionalni)	9
7. Realni brojevi	10
8. Brojeva kontinuiteta skupa realnih brojeva	11
9. Primjeri linearnih grupa	14
10. Kongruencija	19
11. Principi kongruencije i grupe	20
12. Prsten $\mathbb{R}$	23
13. Polje, komutativno tijelo - primjeri	24
14. Primjeri polja	25
15. Vektorski prostori	28
16. Primjeri vektorskih prostora	29
17. Baze	34
18. Podprostori	35
19. Direktna suma	36, 41
20. Linearna nezavisnost	37
21. Linearna kombinacija	38
22. Dimenzija vektorskog prostora	39
23. Primjeri	40
24. Direktna suma	41, 36
25. Pojam linearnog operatora	42
26. Pojam algebre	43
27. Definicija linearno algebre	44
28. Matrice	45
29. Linearna predstavka i primjeri	46
30. Baza	48
31. Baze i primjeri	50
32. Slika i primjeri	52
33. Rang linearnog operatora	55
34. Baze i primjeri	56
35. Minimalni polinom	59, 60
36. Recipročni element	61
37. Spektar	64
38. Praktično određivanje minimalnog polinoma	66
39. Gledanje matricnog prikaza o bazi	68
40. Minimalni polinom	70

41. Testiraja	71
42. Rezime	75
43. Karakteristične vrijednosti i vektori	76
44. Elementarne transformacije i primjeri	77
45. Invarijantni podprostor i	
46. karakteristične vrijednosti linearnog operatora	80, 81
47. Primjeri	82
48. Hamilton - Cayley - es teorem	85
49. Skalarni produkt	92
50. Novi skalarni produkt	95
51. Norma ili dužina	97

Uvodne definicije

1

* Trdnja (nad, stav, izjava) je iskaz koji ima smisla i za koji vane določeni principi;

1. (Princip isključitve) Trdnja ima lahko eno od dveh izidov: istinitost ali neistinitost, tj. ne more biti istinita in neistinita.

2. (Princip kontradikcije) Trdnja ne more biti istinita in neistinita hkrati.

* $P \wedge Q$... konjunkcija (produkt), trdnja "P in Q"

* $P \vee Q$... disjunkcija (zbir), trdnja "P ali Q" (inkluzivna)

* $\bar{P}$... trdnja $\bar{P}$ je istinita točno tisto ko je trdnja P neistinita, odvisno
trdnja $\bar{P}$ je neistinita $\Leftrightarrow$ trdnja P je istinita:

* $(P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q) = P \veebar Q$... ekskluzivna disjunkcija

1. Komutativnost disjunkcije: $D_1 \vee D_2 = D_2 \vee D_1$
2. Asociativnost disjunkcije: $D_1 \vee (D_2 \vee D_3) = (D_1 \vee D_2) \vee D_3$
3. Idempotentnost disjunkcije: $D_1 \vee D_1 = D_1$
4. Asociativnost konjunkcije: $D_1 (D_2 D_3) = (D_1 D_2) D_3$
5. Lupa i desna distribucija konjunkcije:

$$D_1 (D_2 \vee D_3) = D_1 D_2 \vee D_1 D_3$$

$$(D_1 \vee D_2) D_3 = D_1 D_3 \vee D_2 D_3$$

6. Idempotentnost iteracije: $(D_1^*)^* = D_1^*$
7. Parov iteracije: $D_1^* = \Lambda \vee D_1 D_1^*$
8. Neutralnost prave rječi: $\Lambda D_1 = D_1 \Lambda = D_1$
9. Iteracija prave rječi: $\Lambda^* = \Lambda$
10. Iteracija parovog shvata: $\Phi^* = \Lambda$
11. $(D_1^* D_1)^* = D_1^*$
12. $(D_1 D_2)^* D_1 = D_1 (D_2 D_1)^*$
13. $(D_1 \vee D_2)^* = (D_1^* D_2^*)^* = (D_1^* \vee D_2^*)^*$
14. $(D_1 \vee D_2)^* = D_1^* (D_2 D_1^*)^* = (D_1^* D_2)^* D_1^*$
15. ~~Iteracije D_1, D_2, D_3 su asociativne~~
 Rječi koje ne ulaze u D_1, D_2, D_3 :

$$D_4 = \overline{D_1 \vee D_2 \vee D_3} / \Lambda$$
16. Komutacija iteracije: $D_1 D_2^* = D_2^* D_1$
17. Produkt iteracije: $D_1^* D_1^* = D_1^*$

- (2)
- * $P \Rightarrow Q$... implikacija tvrdnje P na tvrdnju Q .
 "Ako P tako Q "
 " P je dovoljen uslov za Q "
 " Q je potreban uslov za P "
 " P sledi Q "
 " Q je posledica tvrdnje P "

1) * $Q \not\Rightarrow P$... Q ne povlači P ?

- * $P \Leftrightarrow Q$... ekvivalencija tvrdnje P sa tvrdnjom Q
 "Ako P tako Q i ako Q tako P "
 " P je onda i samo onda ako je Q "
 " P je potreban i dovoljen uslov za Q "

* $\forall a \quad a = a$... za svih a važi a jednako a

* $\forall a, \forall b \quad (a, b \in \mathbb{C}) \Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Za svih a i b iz skupa $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva važi jednakost: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

* $(\forall a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) (\exists x \in \mathbb{C}) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$
 Postoji barem jedan x iz skupa kompleksnih brojeva takav da je $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

* $(\forall x) (\exists y) \quad x < y$

Za svih x postoji barem jedan y takav da je $x < y$

* $\forall$... svih, svi

* $\exists$... postoji barem jedan

Pojam skupa

(3)

- * Skup ... množina, mnoštvo, klasa, kolekcija
- * Elementi skupa ... članovi, točke, objekti
- * $S = \{x, y, z, \dots\}$... skup S sadržava je elemente $x, y, z, \dots$
- * $S = \{x : P(x)\}$... skup S sadržava je svi element x za kojim P .
 $S = \{x \mid P(x)\}$
- * $x \in S$... x je element skupa S
- * $x \notin S$... x nije element skupa S
- * $\mathbb{N}$... skup svih prirodnih brojeva
- * $\mathbb{Z}$... cijelih brojeva $\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- * $\mathbb{Q}$... racionalnih brojeva
- * $\mathbb{R}$... realnih brojeva
- * $\mathbb{R}^+$... pozitivnih brojeva
- * $\mathbb{R}^m$... potencija realnih brojeva
- * $\mathbb{I}$... iracionalnih brojeva
- * $\mathbb{C}$... kompleksnih brojeva
- * (a, b) ... otvoren interval u $\mathbb{R}$ ili krako interval
- * $[a, b]$... zatvoren interval u $\mathbb{R}$ ili krako segment
- * $A = B$... skupovi A i B su jednaki i postoje se od istih elemenata (poredak nije bitan)
- * $A \neq B$... skupovi A i B nisu jednaki
- * m ... prirodan broj
- * $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$... konačan skup
- * $S = \{x_1, x_2, \dots\}$... beskonačan skup
- * $B \subset A$... B je potskup (dio) skupa A
- * $A \supset B$... A je nadskup skupa B
- * $A \subseteq B$... isti potskup, podprostor
- * $A \subset B$... isti pravi potskup

(4)

* $A \cup B$... unija (zbrajanje, skup) svih elemenata
 $A + B$ koji se nalaze barem u
 jednom od skupova A i B
 Oznacavanje:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \subset C$$

$$(\forall x) (x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

* $A \cap B$... presjek (produkt, zajednički dio) svih
 $A \cdot B$ elemenata koji istovremeno
 $A \cdot B$ pripadaju i skupu A i skupu B
 Oznacavanje:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \subset C$$

$$(\forall x) (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

* $\emptyset, \cup, \cap$... prazan skup (prazni skup, vakuum)
 Za dva skupa se kaže da su
 disjunktini, ako nemaju
 zajedničkih elemenata:

$$A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x) x \notin A \subset C$$

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}$$

* $A \cap B \neq \emptyset$... skupovi A i B nisu disjunktini

$$(\exists x) x \in A \cap B \dots \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

* Za $\cup$ i $\cap$ vrijedi zakoni: idempotencija, komutacija,
 asocijacija i distribucija

$$* (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

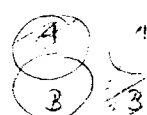


$$* (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

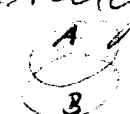


(5)

* $A \setminus B$... diferencija (razlika) skupova A i B
 je skup svih elemenata A
 koji ne pripadaju skupu B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{ili} \quad \forall x \quad x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$


* $A \Delta B$... simetrična diferencija skupova A i B

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$


$$\bar{A} = \{x : x \notin A \wedge x \in I\} \quad \forall A \subset I$$

$\bar{A}$... komplement skupa A u odnosu na skup I

* $\bar{A} = I \setminus A$... skup $\bar{A}$ je komplement skupa A
 u odnosu na skup I

* $Z = X \times Y = \dots$ Dekartov produkt dva skupa
 X i Y je skup Z čiji su elementi
 $= \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$ uređeni parovi sa prvom
 komponentom iz skupa X
 i drugom iz skupa Y

* $X \times Y \neq Y \times X$... Dekartov produkt nije
 općenito komutativna operacija

* ρ ... relacije ekvivalencije ti mora zadovoljavati

1. reflektivna tj. $\forall a \in S \quad a \rho a$

2. simetrična tj. $\forall a, b \in S \quad a \rho b \Rightarrow b \rho a$

3. tranzitivna tj. $\forall a, b, c \in S \quad a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$

* relacije ekvivalencije su:

a) Jednakost $=$

b) Paralelnost $\parallel$

c) Okomitost $\perp$

d) Sukladnost $\equiv$

e)

* $a \mid b$... a se deli u b bez ostatka

(6)

$$* f: X \rightarrow Y$$

$$f: (x, y) (x \in X, y \in Y) \left\{ \begin{array}{l} X, Y \neq \emptyset \text{ (neprazni skupovi)} \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

Preslikavanje (funkcija) skupa X u skup Y .

Kao rezultat dolazi se podskup skupa $X \times Y$ tako da se svakom $x \in X$ prvo namo jednoznačno kao prva komponenta u elementima navedenog podskupa

$$* (x, y) \in f \dots \{x \dots \text{original}, y \dots \text{slita}\}$$

$$* x \mapsto f(x) \dots \text{funkcija } f \text{ pridružuje elementu } x \text{ iz skupa } X \text{ element } f(x) \text{ iz } Y$$

$$* S \times S \rightarrow S \dots \text{binarna operacija u jednom skupu } S = \{a, b, c, \dots\}$$

Čita se: $a \in S, b \in S \Rightarrow a \circ b \in S$

To je jedno preslikavanje.

$$* a \circ b = c \dots \text{(binarna) operacija primenjena na elementima skupa } S.$$

$$* \circ \dots \text{operator (znak) koji kaže da na elemente skupa treba primeniti određeni postupak (operaciju)}$$

$$* (S, \circ) \dots \text{gruposid, skup } S \text{ u kojemu je definisana binarna operacija } \circ.$$

$$* \text{Operacije kojima se razlikujuje operator } \circ:$$

$$+ \text{ za sabiranje}$$

$$- \text{ za oduzimanje}$$

$$\times \text{ ili } \cdot \text{ za množenje}$$

$$: \text{ ili } / \text{ za deljenje}$$

$$\cup \text{ za uniju skupova}$$

$$\cap \text{ za presjek skupova}$$

$$\setminus \text{ za diferenciju skupova}$$

$$\vdots$$

* Osnovne binarne operacije

1. Asociativnost

Neka je dan grupoid $(S, \circ)$. Ako su neki tri elementa $a, b, c \in S$ važi:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

kaže se da je operacija „ $\circ$ “ asociativna na skup S i svaki od rezultata iznosi

$$(a \circ b) \circ c \quad \text{ i } \quad a \circ (b \circ c)$$

značava se: $a \circ b \circ c$.

2. Komutativnost

Neka je dan grupoid $(S, \circ)$. Ako su neki dva elementa $a, b \in S$ važi jednakost

$$a \circ b = b \circ a$$

kaže se da je operacija „ $\circ$ “ komutativna na S .

3. Neutralni element

Ako u grupoidu $(S, \circ)$ postoji takav element $e \in S$ za koji je

$$(\forall a \in S) a \circ e = e \circ a = a$$

on se zove neutralni ili jedinичni element.

4. Regularni element

* Ako su neki pos $b, c \in S$ važi:

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$$

kažemo da je a levo regularan element za operaciju „ $\circ$ “.

* Ako su neki pos $b, c \in S$ važi:

$$b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$$

kažemo da je a desno regularan element za operaciju „ $\circ$ “.

- Element a je regularan za operaciju „ $\circ$ “ ako je i levo i desno regularan za tu operaciju.

5. Simetrični element

* $a^{-1} \circ a = e$ $a \in S$ ima levo simetričan $a^{-1} \in S$

* $a \circ a^{-1} = e$ $a \in S$ ima desno simetričan $a^{-1} \in S$

- Element $a \in S$ ima simetričan element a^{-1} za operaciju „ $\circ$ “ $\Leftrightarrow$ ako vrijede gore navedeni

Pojam grupe

(8)

Kako se da grupeid $(G, \circ)$ ima strukturu grupe
ili da čini grupu, ako operacija „ $\circ$ “ ima osobine?

1. Operacija je asocijativna:

$$(\forall a, b, c \in G) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

2. Operacija ima neutralni element $e \in G$

$$(\exists e \in G), (\forall a \in G) \quad a \circ e = e \circ a = a$$

3. Svaki element $a (\in G)$ ima ^{inverzni} element
 $a^{-1} (\in G)$ za operaciju „ $\circ$ “:

$$(\forall a \in G) \quad (\exists a^{-1} \in G) \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Ali je $(G, \circ)$ grupa, kad se da element skup, a
sadržavaju grupu

Struktura grupe: $(G, \circ)$ $G \neq \emptyset$ (neprazan skup)
(neprazan skup, operacija)

* Ali je $(G, \circ)$ grupa i ako je operacija „ $\circ$ “
komutativna, kad se da je grupa
komutativna ili ABELOVA

$$4. (\forall a, b \in G) \quad a \circ b = b \circ a$$

* Li elementi jedne grupe su regularni
za operaciju grupe.

* Grupa $(G, \circ)$ je konačna, ako je skup G
konačan, inače je beskonačna.

1. Prostorni brojevi, N su pozitivni cijeli brojevi
poredani u raskoši niz
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

a. između bilo kojega

$$a > b$$

$$a = b$$

$$a < b$$

tj. jedno od ove tri relacije je uvijek istina.

b. baki podskup od N podlin najmanji
element, tj. on je dobro uređen sklop

c. Skup N je diskretan

2. Cijeli brojevi, Z su brojevi:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

poredani u raskoši niz

a) Cijeli brojevi su sklopu na relacije $>$
čine uređen (ali ne dobro uređen)

diskretan skup

b) $Z > 0 \dots$ pozitivni brojevi

c) $Z < 0 \dots$ negativni brojevi

d) Pozitivni brojevi i 0 su se zajedno
ne-negativni brojevi.

3. Racionalni brojevi, Q su brojevi oblika $\frac{a}{b}$ gdje
brojevi a, b ($b \neq 0$)

a) Ako vrijedi $b|a$ (b se sadržava u a) rezultat
racionalni broj je cijeli broj

b) Skup Q je posredna gust tj. između
svakih dva (različita) racionalna broja
 a, b ($a < b$) postoji neki racionalni broj
(čak beskonačno mnogo takvih brojeva)
tako da je $a < c < b$.

c) Takav skup je prebrojiv

Zbraja je zbrajanje prirodnih brojeva je neograničeno, jer je rezultat opet prirodan broj. Oduzima je oduzimanje brojeva je ograničeno, sve dok se ne uvedu cijeli brojevi. To su tzv. relatiivni brojevi. Djeljenje u području prirodnih brojeva je ograničeno na dividend koji je višekratnik divizora sve dok se ne uvedu racionali (cijeli ili decimalni).

Racionali, prirodni i decimalni brojevi pripadaju skupu racionalnih brojeva. U cijeli brojeve i racionale s pozitivnim i negativnim racionima, kao skup racionalnih brojeva mogu se pretvoriti u obliku oblika raciona (raciona oblika) pa se zato racionali broj definišu kao oblik raciona. Srijeta racionalnih brojeva je da pomnoženjem čitavi osredne racionale udjele na njih opet dobijemo racionali broj.

4. Realni brojevi "R" mogu se definirati (10)

A) kao tzv. preseri u (uređenom) skupu
racionalnih brojeva, ili kao granič
(a_i) ograničeni nesilazni nizovi $\{a_i\}$
racionalnih brojeva.

* U skupu $\mathbb{R}$ definirane su dvije osnovne
operacije: zbrajanje i množenje
ponoću koje se svakom paru
realnih brojeva $x, y \in \mathbb{R}$ pridružuju
broj $x+y \in \mathbb{R}$, odnosno broj $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

* Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ (tj. realni
kontinuum $\mathbb{R}$) je potpuno uređen
tj. za svaka dva realna broja
 $x, y \in \mathbb{R}$ zna se da x nije veći od y
ili da y nije veći od x :
$$x \leq y \quad \text{ili} \quad y \leq x$$

* Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$ piše se $x < y$
brzoba realnih brojeva:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$

asocijacija

2. $0 + x = x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

neutralni element

3. $x + (-x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R})$

simetričan element

4. $x + y = y + x$

komutacija

5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

asocijacija

6. $1 \cdot x = x \quad (\forall x \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)$

neutralni element

7. $x^{-1} \cdot x = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R})$

simetričan element

8. $x \cdot y = y \cdot x$

komutacija

9. $x(y + z) = xy + xz$

distribucija

10. $x + x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad x, y, z \in \mathbb{R}$

11. $x \leq y \wedge y \leq x \Leftrightarrow x = y$

12. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

13. $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

14. Brojsho kontinuiteta skupa realnih brojeva
 koji odredi omeđen skup $M \subseteq \mathbb{R}$
 ima najmanji gornji granicu,
 tzv. supremum $\sup M$. Kari se da
 je skup M omeđen od gore, ako ima
 bar jedan gornji granicu c , tj.
 ako postoji $c \in \mathbb{R}$ sa svojstvom
 da je $m \leq c$, $\forall m \in M$.

Napr. skup negativnih brojeva je
 omeđen od gore, iako pozitivni
 broj i broj 0 su gornji granice
 ovog skupa. Im tome je 0
 najmanja gornja granica tj.
 supremum.

Brojstvo 14 je neobično važno. Iz njega
 sledi da je realni raz u skupu realnih
 brojeva proizveden nekim realnim brojem
 a u tome se upravo i sastoji kontinuitet
 skupa realnih brojeva.

① Rest u nekom potpuno omeđenom skupu X je
 realni razmak skupa X ve dva dijela A i B
 bez zajedničkih elemenata i takva da je
 svaki $a \in A$ manji od nekog $b \in B$, tj.
 da je skup A potpuno levo od skupa B . Kari se
 da je rest proizveden nekim elementom $c \in X$
 ako je $a \leq c$, za sve $a \in A$, i istodobno je $c \leq b$
 za sve $b \in B$.

Poslednica 14 svojstva je karakteristična
 za skup realnih brojeva, što znači da ne
 postoji nikakav drugi skup koji poseduje
 sva svojstva od 1...14.

Realni brojevi se mogu izgraditi
postepeno poteci od prirodne brojeve,
proširujući područje broja najpre na
cijele, pa na racionalne i napokon
na realne brojeve. Najteže je preći
od racionalnih na realne brojeve.

Treba prijetiti da se racionalni brojevi
imaju dva navodna svojstva od
posljednjeg svojstva $\mathbb{N}$.

Opcenito se realni brojevi strogo usle
kao osnovu u slepu racionalnog
brojeva.

Nakon što je uveden brojni pravac,
može se zadovoljno govoriti o
realnom kontinuumu ili o pravoj
o brojevima i tačkama.

Dobro prelikovanje f realnog kontinuumu $\mathbb{R}$
u $\mathbb{C}$ nekog njezdrav elija u $\mathbb{R}$ zove se
funkcija i preciznije realna funkcija
jedne varijable.

5. Iracionalni brojevi „I“ su brojevi
koji nisu racionalni

a) Algebarski iracionalni broj je broj
koji je algebarski jednakost s koeficijentima
koeficijentima : npr:
 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{5}$

b) Transcendentni su ostali iracionalni brojevi
npr: e , π , e^π , $e^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$

Racionalni broj zapisan kao decimalni razlomak završava se, tj. je beskonačno periodski tj. od neke mjesta na dalje ponavlja se ista grupa znamenaka
npr. $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{8}{7} = 1,142857142857...$

Iracionalan broj nije je beskonačno neprodukljiv.

6. Kompleksni brojevi su brojevi oblika $a+ib$, gdje su a, b realni brojevi, a $i = \sqrt{-1}$ je imaginarna jedinica

7. Prirodni brojevi su oni brojevi koji su zbir samo sa 1 i sa prethodnim brojem.

"Eratosthenovo rito"

Prva prirodni brojeva već od 1 prestaju se pojaviti (1. korak) svaki drugi broj od 2. Zatim (korak 2) se prestaju pojaviti svi brojevi od 3, brojevi koji su parni prestaju. Zatim (3. korak) prestaju se pojaviti svi brojevi od 5 itd.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

Primer 7: $\mathbb{Z}$ brojeve realnih brojeva
grupa $(\mathbb{R}, +)$

94

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ vrijedi!
2. $x + 0 = 0 + x = x$ vrijedi!
3. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ vrijedi!

Dakle operacija "+" ima sve tri osobine:
asocijativna, ima neutralni i
inverzioni element tj. elementi
skupa realnih brojeva s obzirom na
operaciju "+" sačinjavaju jedan grupu

4. $x + y = y + x$ vrijedi!

Dakle, grupa $(\mathbb{R}, +)$ je komutativna

Primeri komutativnih grupa:

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$

* $(\mathbb{R}, \cdot)$ nije komutativna grupa, jer ne
postoji inverzioni element s
obzirom na množenje

1. $x(yz) = (xy)z$ vrijedi

2. $1 \cdot x = x$ vrijedi

3. $x \cdot x^{-1} = 1$ ne vrijedi za $x = 0$ (ne postoji 0^{-1})

* $(\mathbb{R}^n, +)$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

ξ koi ξ

$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$

ζ zeta ζ

$-x = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n)$

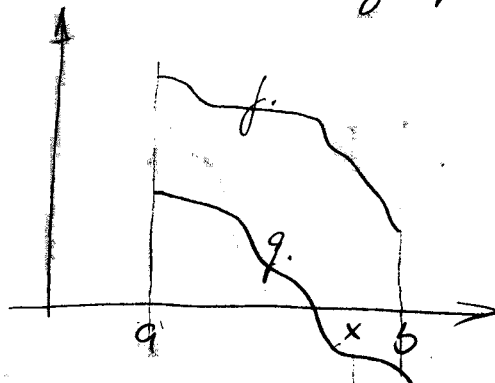
$0 = (0, 0, \dots, 0)$

Def. $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$??

$$\begin{aligned} & (\xi_1, \dots, \xi_n) + [(\eta_1 + \xi_1), (\eta_2 + \xi_2), \dots, (\eta_n + \xi_n)] = \\ & = (\xi_1 + (\eta_1 + \xi_1), \xi_2 + (\eta_2 + \xi_2), \dots, \xi_n + (\eta_n + \xi_n)) = \\ & = ((\xi_1 + \eta_1) + \xi_1, (\xi_2 + \eta_2) + \xi_2, \dots, (\xi_n + \eta_n) + \xi_n) = \\ & = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n) + (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ & = x + y + z \end{aligned}$$

Primeri komutativne grupe



f, g ... neprekinete funkcije

Skup $F[a, b]$ je skup svih neprekidnih funkcija
Možemo definirati grupu: $(F, +)$

$$f + g = h$$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Treba proveriti da li obrazloženje dobro
Pa: jest, jer: svaki neprekidna funkcija
daje nekakav nov neprekidnu funkciju
Da li $(F, +)$ bila grupa mora biti definisano
tačke 1., 2., 3. odnosno 4.

1. $(f + g) + h = f + (g + h)$ za svaki x .

Provera: $[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) =$

(16)

fukcije su jednake

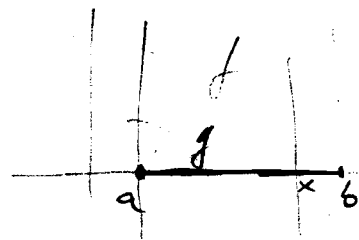
$$= (f(x) + g(x)) + h(x) =$$

$$= f(x) + (g(x) + h(x)) =$$

$$= f(x) + (g+h)(x) =$$

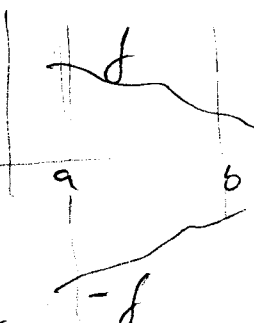
$$= [f + (g+h)](x)$$

2. Neekstalni element
To je real funkcija



3. Simetrični element

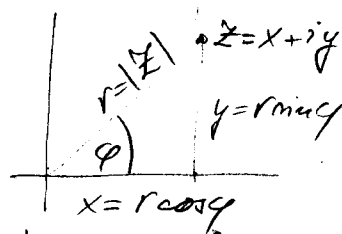
Dele pravi i simetrični
funkcije (odnosno element
grupe)



Zaključak: Grupoid $(F, +)$ čini grupu!

Primer: $\sqrt[n]{1}$

$$z = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



$$z = r e^{i(\varphi + 2k\pi)} \quad (\text{red periodičnost})$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{(\varphi + 2k\pi)}{n}}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Za $\sqrt[n]{1} \Rightarrow \varphi = 0 \quad |1| = 1$

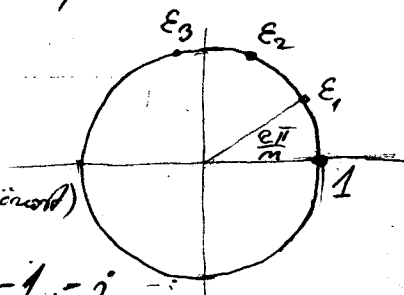
I korjen = 1

korjeni su $1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \sqrt[n]{1}$ (periodičnost)

Napr: $\sqrt[4]{1} = ?$ korjenima $1, i, -1, -i$

Pitamo se da li ove korjene $\sqrt[n]{1}$
proglasiti jednou grupom.

$1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1} \rightarrow \text{skup } G$



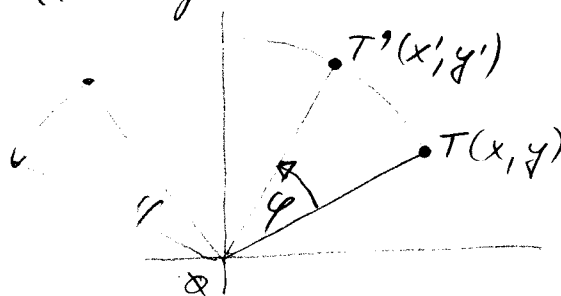
Očito da je moramo definirati (17)
 i operaciju: Neka to bude stična
 množenje kompleksnih brojeva:

* Teba definirati grupu: prodjiniti
 množenje: Grupa ima n -elementa
 $(G, \cdot)$... da li je to grupa?

$$G = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1}\} = \{\sqrt[n]{1}\}$$

Primjer: ravnina: točka
 funkcija koje preslikavaju točku u točku
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

(rotacije oko točke & razdajenost kutova)



Rotacija na kut 0 rotacija svakom točku, tamo
 gdje ona je. To je identiteta.

Ali imamo rotacije na φ_1 i nekih
 drugih rotacija na φ_2 , treća rotacija φ_3
 daje novu rotaciju:

$$\boxed{\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2}$$

Ovo je komutativna grupa
 skup svih rotacija $G = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$
 Operacija je sabiranje (+)
 Grupa $(G, +)$

1. $\varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3) = (\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3$
2. Neutralni element je nul-rotacija.
3. Inverzni element je $-\varphi$
4. $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$ Komutativna grupa.

Točka T u ovom meduprazemju (18)
~~možemo~~ interpretirati kao
kompleksni broj z , a T' kao z' . Ako m
to kompleksni broj rotacija je
njegovo konjugatni broj.

$$z \cdot e^{i\varphi} = z'$$

* Ako od svih rotacija odvojimo one
rotacije sa $\frac{2\pi}{n}$ to su, upravo rotacije $\sqrt[n]{1}$
Ovo je grupa koja ima n elemenata
Treba provjeriti da li je $(G, \cdot)$, $G = \{\sqrt[n]{1}\}$
grupa:

1. $E_1(E_2 \cdot E_3) = (E_1 \cdot E_2) E_3$ znamo da vrijedi
2. Neutralni element: to je upravo
pari broj 1
3. Inverzni element: simetričnost
a obrasci na os abscisa
4. Komutativnost je primetna, jer
je vidljivo da li neke rotacije
rotacije sa φ_1 pa onda sa φ_2 ili
obrnuto.

Kongruencija

19
m se sadržava (a-b) bez ostatka
čita se

Ako su cijeli brojevi a, b, m vrijedi $m \mid (a-b)$,
lako se do m brojevi a, b kongruentni
modulu m (oznaka: $a \equiv b(m)$ ili $a \sim_m b$)
Cijeli brojevi $a \equiv 0(2)$, tj. oni koji su djeljivi sa 2
(bez ostatka) zovu se parni ili čisti brojevi;
 a ostaci, tj. brojevi $a \equiv 1(2)$ koji nisu
(bez ostatka) djeljivi sa 2, neparni ili lihi.

Za računanje s kongruencijama vrijedi:

$$a \equiv a(m); a \equiv b(m) \Rightarrow b \equiv a(m);$$

$$a \equiv b(m) \text{ i } b \equiv c(m) \Rightarrow a \equiv c(m)$$

0
v
0 { Relacija kongruencije je dobra relacija
ekvivalencije, pa se cijeli brojevi za
dani m raspadaju na disjunktne
(bez zajedničkih elemenata) klase
brojeva međusobno kongruentnih modulu m

Nadalje:

$$a \equiv b(m) \text{ i } c \equiv d(m) \Rightarrow a+c \equiv b+d(m) \wedge$$

$$\wedge ac \equiv bd(m),$$

$$ab \equiv ac(m) \quad \forall (a, m)=1 \Rightarrow b \equiv c(m)$$

Za cijele brojeve a, b ($b > 0$) vrijedi
algoritam djeljivosti:

Za dane a, m postoji jedinstveno
određeni q, r takvi da je:

$$a = mq + r \text{ i do je } 0 \leq r < m.$$

što vrijedi za:

$$m < 0 \text{ i } 0 \leq r < -m$$

Kongruencija ... mbladica, poludavanje i m
oblika i m veličini

Relacija kongruencije u teoriji brojeva ... Grosse

Primer: Uzmemo neke brojeve (20)
 $\mathbb{Z}$ i skalarimo $m = 3$

map: $\mathbb{Z}, 3$

Uzmemo 13 i dijelimo sa 3

$$13 = 3q + r$$

$$\text{krajnji} = 4 \quad \rightarrow \text{ostatak} = 1$$

Dijeljenjem dva broja to je krajnji
dva nova broja: krajnji i ostatak.
U našem primeru ostatak je manji
od 3 i nije broj.

$$0 \leq r \leq 3$$

$$r = 0, 1, 2$$

U skupu $\mathbb{Z}$ treba definirati relaciju
ekvivalencije tj. neke nove brojeve
proglasiti novim ekvivalentnim.

$$\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \quad (\mathbb{Z}_1, \text{argumenti } \mathbb{Z}_2 \text{ modulo } m)$$

$\sim_m \dots$ ekvivalencija s obzirom na
dijeljenje sa m

$$\mathbb{Z}_1 = m q_1 + r_1$$

$$\mathbb{Z}_2 = m q_2 + r_2$$

$$\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \iff r_1 = r_2$$

$$\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 = m(q_1 - q_2)$$

Dva su čisti da je $\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2$ djeljivo sa m
Dakle $\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \implies \mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 = m \cdot q$

Princip: Umenemo ovaj broj (20)
 $\mathbb{Z}$ i stabilizujemo $m=3$

map: $\mathbb{Z}, 3$

Umenemo 13 i dobijamo sa 3

$$13 = 3q + r$$

$$\text{kvojant} = 4 \quad \rightarrow \text{ostatak} = 1$$

Dokazujemo dva broja to je tačnije
dva nova broja: kvocijent i ostatak.
U našem principu ostatak je manji
od 3 i ovaj broj.

$$0 \leq r \leq 3$$

$$r = 0, 1, 2$$

U skupu $\mathbb{Z}$ treba definirati relaciju
ekvivalencije tj. neko ćemo lozjivo
proglaviti nejeto ekvivalentnost.

$$\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \quad (\mathbb{Z}_1 \text{ kongruentno } \mathbb{Z}_2 \text{ modulo } m)$$

$\sim_m \dots$ ekvivalencija s obzirom na
dijeljenje sa m

$$\mathbb{Z}_1 = m q_1 + r_1$$

$$\mathbb{Z}_2 = m q_2 + r_2$$

$$\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \iff r_1 = r_2$$

$$\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 = m(q_1 - q_2)$$

Dva su ta da je $\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2$ dijelivo sa m
Dokle $\mathbb{Z}_1 \sim_m \mathbb{Z}_2 \implies \mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 = m \cdot q$

Tratimo se primjeru $\mathbb{Z}_3$

(21)

Grupirajmo cijele brojeve $\mathbb{Z}$ prema ostatku kod dijeljenja sa 3.

$0 \dots 3, 6, 9, 12, 15 \dots$ ovo su ekvivalentni
 $1 \dots 1, 4, 7, 10, 13 \dots$ " "
 $2 \dots 2, 5, 8, 11, 14 \dots$ " "

Dobili smo novi skup: $\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ ili općenito:

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2 \dots n-1\}$

Sada s ovakvim skupom formiramo

grupu: $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ (brojevi modulo n ,

ili konkretno: brojevi modulo 3

$\oplus$... aditivna grupa (podprosta)
 nije kao običan realni broj

$(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0 ⁽³⁺⁰⁾
2	2	0 ⁽³⁺⁰⁾	1 ⁽³⁺¹⁾

CAYLEY-ove tablice

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1 ⁽³⁺¹⁾

$(\mathbb{Z}_3, \odot)$

napr: broj koji kod dijeljenja daje
 ostatak nula, broj sa kojim
 koji kod dijeljenja daje ostatak
 dva, daje broj koji kod dijeljenja
 daje ostatak dva

Treba provjeriti da li je $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

komutativna grupa

1. $1 \oplus (2 \oplus 0) = (1 \oplus 2) \oplus 0$

2. Jedinični element je 0 $\{1 \oplus 0 = 1$
 $2 \oplus 0 = 2$

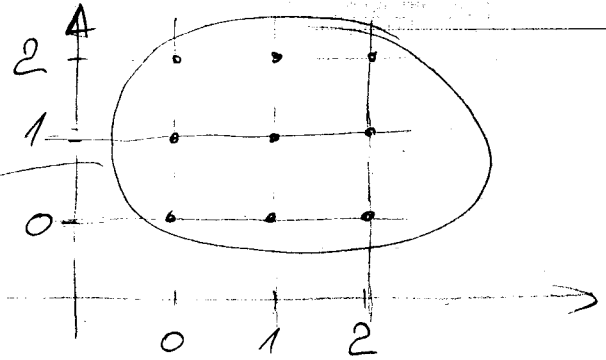
3. Inverzni elementi su negativni brojevi

4. $1 \oplus 2 = 2 \oplus 1$ komutativnost.

Primer: $\mathbb{Z}_3^2$... grupa
 $(\mathbb{Z}_3^2, \oplus)$

(22)

Prosta
 trodimenzionalni
 vektorski prostor



$$\mathbb{Z}_3^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

$$(1,1) \oplus (0,2) = (1,0)$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$1. \quad (0,1) \oplus ((1,0) \oplus (2,1)) = ((0,1) \oplus (1,0)) \oplus (2,1)$$

$$(0,1) \oplus (0,1) = (0,2) = (1,1) \oplus (2,1) = (0,2)$$

2. Jedinичni element je 0

3. Inverzni elementi su negodni

4. Komutativnost je zadovoljena

Grupa $(\mathbb{Z}_3^2, \oplus)$ je komutativna grupa

Prsten R

(23)

Prsten R je aditivna Abelova grupa $(R, +)$ a bar dva različita elementa u kojima je nekom uređenom paru elemenata $a, b \in R$ pridružen jedan jedini element $a \cdot b \in R$ koji zovemo produktom elemenata a i b .

U prstenu moraju biti zadovoljena

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ asocijativnost
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ lijeva distribucija
3. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ desna distribucija
4. $a \cdot b = b \cdot a$ komutativnost

Skup R čini prsten u kojem su operacije $+$ (zbir) i $\cdot$ (množenje).
Neutralni element operacije $+$ označava se sa 0 .

Cijeli ($\mathbb{Z}$), racionalni ($\mathbb{Q}$), realni ($\mathbb{R}$) i kompleksni ($\mathbb{C}$) brojevi su uobičajeni zbirni i množbeni prsteni u komutativnom prostoru.

Prsten koji čini skup R i njegove operacije $+$ i $\cdot$ označava se $(R, +, \cdot)$.

Pojedini Φ nazivamo prsten sa svojstvom da skup svih od nule različitih elemenata iz Φ tj. skup $\Phi \setminus \{0\}$, obrazuje grupu o obzoru na množenje. Jedinični element te grupe označavamo sa 1 .

Pojfe (komutativno telo)

(24)

Pojem naravnega prostora $(\Phi, +, \cdot)$ ali skup $\Phi \setminus \{0\}$ (suh od mule različite delavosti, čini komutativno grupu s obratno nq operacijo množenja " $\cdot$ ". Jedinici čini element te grupe obratna sa na 1

Def. $(\Phi, +, \cdot)$ je poje ako vzgodi:

$$\Phi \neq \emptyset$$

$$0, 1 \in \Phi$$

Posebno treba dokazati da isto što u poje kot se množi s 0 daje nulę!

1. $(\Phi, +)$ čini komutativno grupu
2. $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$ čini komutativno grupu
3. $x(y+z) = xy + xz$

Arjstva poje:

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$
2. $x+0 = 0+x = x$
3. $x+(-x) = (-x)+x = 0$
4. $x+y = y+x$

$$(5) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$6. \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$7. \quad x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

$$(8) \quad xy = yx$$

$$(9) \quad x(y+z) = xy + xz$$

takim distribucije preveri 1...4 pa 5...8

Primeri poje:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

2? $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nije poje, nego samo prostora skup mlt brojeva $a+ib$, gde su $a, b \in \mathbb{Q}$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nije poje

1. $(\mathbb{Z}, +)$ o.k.

2. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

...

7. Ne zadovoljava

obratna množenja

$$4 \cdot \frac{1}{7}$$

što je recipročni element

$$F(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$(F(\sqrt{2}), +, \cdot)$ Treba dokazati da je ovo prst!

Zbrajanje:

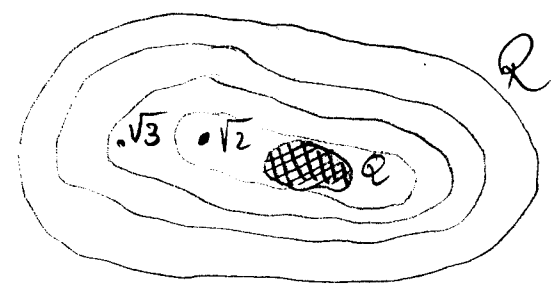
$$a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_a + \underbrace{(b_1 + b_2)}_b\sqrt{2}$$

Množenje:

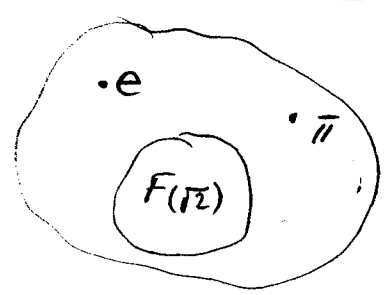
$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \underbrace{(a_1a_2 + 2b_1b_2)}_a + \underbrace{(a_2b_1 + b_2a_1)}_b\sqrt{2}$$

Dakle, prst i zbrajanje i množenje ostaju isti dok dokazujemo da je prst.

?
? To je me može biti manji od $\mathbb{Q}$,
gd mora imati $\emptyset \neq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$



$\mathbb{R}$
 $\mathbb{Q}^+$
 $\mathbb{Q}$
 $\mathbb{Z}$
 $\mathbb{N}$
+
-
= 0
-1, -2, -1, 0, 1
1, 2, 3, ...



$$\pi \neq a + b\sqrt{2}$$

π ne može biti korijen jednadžbe

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Dakle π je transcendentan broj.

Primjeri: To je racionalne funkcije
je moguće, ako se odice realne
množenja.

Primer: $\mathbb{Z}_n$ li je polje (26)

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ $\oplus \dots$ otvorena grupa potoba (podgrupa)
Nehot da nehot ne vidimo da
 $\sim \sim$

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ je polje ako je p prini
(prost) broj.

$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17} \dots$

Ovo je beskonačna serija (konacna
n polje).

Neka je Φ polje i neka je $a, b \in \Phi$
 $a \neq 0$ i $b \neq 0$

Tvrdi se da je $a \cdot b \neq 0$

Pretpostavimo da je $a \cdot b = 0$

$$a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$(a^{-1}a) \cdot b = 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$b = 0$ a ovo je kontradikcija

zaključiti je da je $a \cdot b \neq 0$

$\sim \sim$

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ovo nije polje

Zbog toga je modulo 4 nije polje!

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

jer napr. $(-2) \cdot 2 = 0$ (vidi gornji "pol 3")
Neka lati 1

$\mathbb{Z}_{18}$ nije polje jer 18 nije prost broj. (27)
 tj. $18 = 9 \cdot 2$, dakle ima se razlomiti u dva faktora

$$\mathbb{Z}_2 \quad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

20 je polje
 $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$

Hoće li $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ u polju $\mathbb{Z}_5$ ($\mathbb{Z}$ modulo 5)?

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3 \cdot 4^{-1} + 1 \cdot 2^{-1} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 0$$

NEJASNO

$$\begin{cases} 2^{-1} \text{ u } \mathbb{Z}_5 = 3 \\ 4^{-1} \text{ u } \mathbb{Z}_5 = 4 \\ 3 \cdot 4 \text{ u } \mathbb{Z}_5 = 2 \\ 1 \cdot 3 \text{ u } \mathbb{Z}_5 = 3 \\ 2 + 3 \text{ u } \mathbb{Z}_5 = 0 \end{cases}$$

($\mathbb{Z}_5$)

0	5	10	15	20	25
1	1	6	11	16	21
2	2	7	12	17	22
3	3	8	13	18	23
4	4	9	14	19	24

$\oplus$	0	1	2	3	4	$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

Primjeri:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A $\oplus_5$ B

20 su matrice nad poljem $\mathbb{Z}_5$

$$A \odot_5 B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Vraćamo se matrice $[0,1]$ nad poljem $\mathbb{Z}_2$

227

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\oplus$	0	1	$\odot$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Vektorski prostor

Vektorski prostor je linearni prostor nad tijelom Φ zajedno s aditivnom Abelovom grupom $X = \{x, y, \dots\}$ u kojoj je definirano množenje elementima iz Φ , tj. za svaki par $x \in X$ i $\alpha \in \Phi$ definirano je αx i to je element iz X .

Drugu njezinu komutativnu grupu $(X, +)$ nazivamo vektorskim prostorom nad poljem $(\Phi, +, \cdot)$ ako je definirana funkcija:

$$\begin{aligned} \Phi \times X &\xrightarrow{\text{puta}} X \\ (\alpha, x) &\xrightarrow{\text{podružuje}} \alpha x \quad \alpha \in \Phi, x \in X \\ &\text{množenje sa skalarom} \end{aligned}$$

i za tu funkciju vrijede va pravila:

- 1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ ($\alpha \in \Phi; y \in X$)
- 2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ ($\alpha, \beta \in \Phi; x \in X$)
- 3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ($\alpha, \beta \in \Phi; x \in X$)
- 4. $1 \cdot x = x$ ($x \in X$)

Elemente vektorskog prostora zajedno s vektorima iz Φ nad kojim je X vektorski prostor zajedno s tijelom skalara, a njegove elemente skalarnima. Za $\alpha \in \Phi$ kaže se da je vektorski prostor nad Φ . Vektorski prostor je skup X u kome imaemo obični element i množenje s realnim, odnosno kompleksnim brojevima. Mi bismo obično i množenje zadržavali uobičajena pravila, "+" i "·" realnih brojeva i ne bismo imali skup X tj. skup X je zatvoren s obzirom na te dvije operacije.

Prinjeni vektorski prostori

(29)

Kad definiramo prinjene vektorski prostori definiramo neki skup X , u njemu definirati zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$ s elementima iz skupa Φ i onda provjeriti da li tako definirano zbrajanje i množenje zadovoljava u točki 2 dane aksiome vektorskog prostora.

Prinjeđ: $(R, +)$ nad R (realni v. p.)
 $\alpha \circ x = \alpha x$ (ima na čemu zgraditi)

Uzmimo skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$, operaciju $x + y$ definiramo kao zbrajanje realnih brojeva, a λx za realni broj λ definiramo kao množenje realnog broja λ s realnim brojem x .

Ovakvo definirano operacije ne zadovoljavaju aksiome realnih brojeva, jer ne u potpunosti zadovoljavaju aksiome (1-14) realnih i vektorskog prostora (1-14).

Dakle: $(R, +)$ nad R je vektorski prostor.

Prinjeđ: $(\Phi, +)$ nad Φ je vektorski prostor.

* Svaka komutativna grupa je v. p. nad samom sobom.

Prinjeđ: $(C, +)$ nad $(C, +, \cdot)$ {ovo je v. p. dimenzije 1.}

Prinjeđ: $(C, +)$ nad R {ovo je v. p. dimenzije 2.}

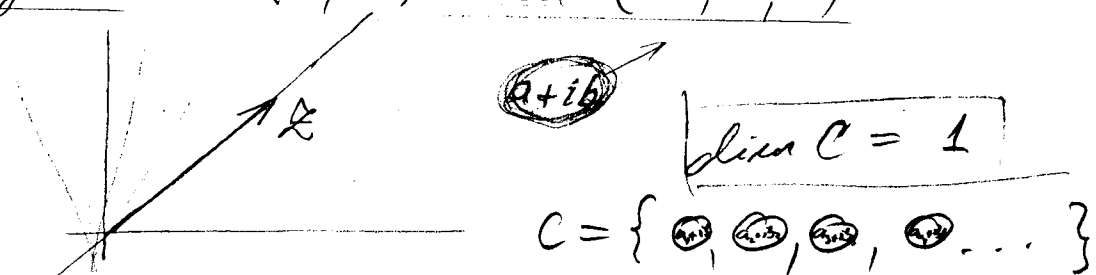
$$\alpha \circ z = \alpha z$$

Dimenzija - vidi stranu 39.

Ova dva v. p. nemaju nikakve veze iako su vektorski i sli.

Prinjeđ: $(C, +)$ nad Q {ovo je v. p. dimenzije ∞ ?}

Primeri: $(\mathbb{C}, +)$ nad $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

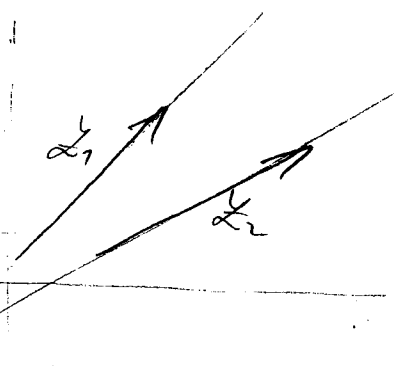


Dovoljno je imati jedan vektor (linearno nezavisnu) da se „pokupe“ svi brojevi.

$(\mathbb{C}, +)$ nad $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ je diskretan i
potrebne su vektore
 x iz $\mathbb{R}$ samo 2 komponente da „pokupe“ $\mathbb{C}$

$\dim C = 2$



$(\mathbb{C}, +)$ nad $\mathbb{Q}$

$(\mathbb{C}, +)$ nad $\mathbb{Z}_p$

$\dim C = \infty$

∞

vidi str. 39

Primeri: $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ nad polju $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^+, \cdot)$... komutativna grupa bez
neutralnog elementa d.p. nad $\mathbb{R}$

Treba definirati funkciju koja će
nam to omogućiti.

$$\Phi \times \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^+$$

$$(\alpha, x) \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}^+$$

Očito množenje ne dade u obzir
skup pozitivnih realnih brojeva
obavljajući realni d.p. ako se „+“ definira
kao isto množenje realnih brojeva,
a „ $\cdot$ “ broji $x > 0$ i realnim brojem x
kao x^x . Nul-vektor u ovom
prostoru je broj 1

Provjerimo svojstva:

(31)

$$1. \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

" $\cdot$ " ... potenciranje
 " $+$ " ... množenje } definicija

$$(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$$

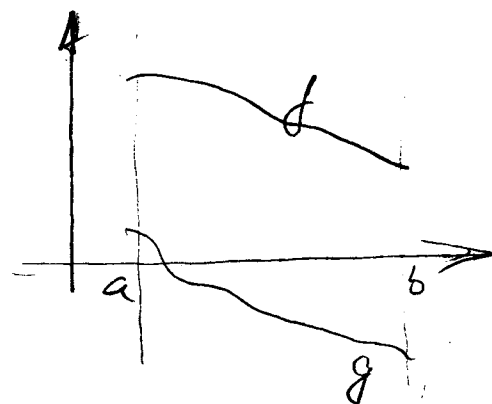
$$2. (\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$$

$$3. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(x^\beta)^\alpha = (x)^{\alpha \cdot \beta}$$

$$4. 1 \cdot x = x^1 = x$$

Primjer: $F[a, b]$ nad $\mathbb{R}$
 $(F[a, b], +)$ nad $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ili $\mathbb{R}_2$
 ili $\mathbb{R}_3$



hoćemo da bude

$$\alpha \cdot f = h$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

U v. p. $F[a, b]$ se "vade" manji komodi prostori

$(C^{(p)}[a, b], +)$ su sve neprobodne
 funkcije koje imaju
 p-derivaciju.

$(C^{(p)}[a, b], +)$ nad $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \dots$ analitičke funkcije

v.p. v.p. v.p. ...

$$(R^n, +) \text{ mod } R$$

(32)

$$\alpha \cdot x = \alpha (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots, \alpha \xi_n)$$

$$y, x \in R^n$$

$$\alpha \in R$$

Treba provjeriti na svojstvu ~~vektorske~~
 vektorske prostora:

$$\begin{aligned} 1. \quad \alpha(x+y) &= \alpha(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots) = \\ &= (\alpha(\xi_1 + \eta_1), \alpha(\xi_2 + \eta_2), \dots) = \\ &= (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots) + (\alpha \eta_1, \alpha \eta_2, \dots) = \\ &= \alpha(\xi_1, \xi_2, \dots) + \alpha(\eta_1, \eta_2, \dots) = \\ &= \alpha x + \alpha y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(\xi_1, \xi_2, \dots) = \\ &= ((\alpha + \beta)\xi_1, (\alpha + \beta)\xi_2, \dots) = \\ &= (\alpha \xi_1 + \beta \xi_1, \alpha \xi_2 + \beta \xi_2, \dots) = \\ &= (\alpha(\xi_1, \xi_2, \dots) + \beta(\xi_1, \xi_2, \dots)) = \\ &= \alpha(\xi_1, \xi_2, \dots) + \beta(\xi_1, \xi_2, \dots) = \\ &= \alpha x + \beta x \end{aligned}$$

$$3. \quad \alpha(\beta x) = \dots = (\alpha\beta)x$$

$$4. \quad 1 \cdot x = x$$

Primer 1: Formiramo ne
pogrešne nizove:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \infty$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots \infty$$

$$a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n, \dots \infty$$

$(N, +)$ ovo je komutativna grupa

$(N, +)$ je v.p. nad $(Z, +, \cdot)$

Ali redovjerno konvergentno nizovi
daje se novi v.p. konvergentni
nizovi nad R .

* Vektor je element komutativne grupe

Primer 2: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Ovo je v.p.

Ali $n \rightarrow \infty$ to su mi mogući

Fourier-ovi nizovi.

Primer 3: $P(t)$ je v.p. nad R

$$x \in P, \quad x(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

$P(t) \dots$ skup svih polinoma varijable t
 $= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

$P_2(t), P_n(t)$ nad R

Polinomi istog stepnja n ne bi
bili dobri v.p.

Polinom III stepnja + polinom III stepnja
je polinom II stepnja
i nije dobar v.p.

Rezime

84

* Komutativna grupa $(X, +)$
 $(x, y) \mapsto x + y$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$

2. $x + 0 = 0 + x = x$

3. $x + (-x) = (-x) + x = 0$

4. $x + y = y + x$

* Polje $(\Phi, +, \cdot)$

1. $(\Phi, +)$ komutativna grupa

2. $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna grupa

3. $x(y + z) = xy + xz$

* X je vektorski prostor nad Φ

$$\Phi \times X \xrightarrow{\pi} X$$

$$(\alpha, x) \xrightarrow{\text{pridruženje}} \alpha \cdot x$$

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

4. $1 \cdot x = x$

Podprostor

Neprazan skup $X_0 \subseteq X$ zovemo
podprostorom vektorskega prostora X ,
aho je X_0 v.p. o obrisom na
operacije ki so definirane na X .
Čisto enostavno i dovolj enostavno je da
 X_0 bude podprostor na X jst da X_0
pusti vektor $\alpha x_1 + \beta x_2$ ($\alpha, \beta \in \Phi$)
koda-god su pusti vektor x_1, x_2 .

Neka je X v.p nad Φ

Neka je $X_0 \subseteq X$

Neka je $x_1, x_2 \in X_0 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in X_0$

Definicija $X_0 \subseteq X$ nad Φ

X_0 je v.p. od X ako je X_0 v.p. nad Φ
(a misli se na iste operacije)

Pitamo se koda to neki podskup
jst podprostor.

Teorema: X_0 je v.p. od X ako uzadi:

$$| x_1, x_2 \in X_0 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in X_0 | \alpha, \beta \in \Phi$$

Dokaz teorema:

X_0 je v.p. (komutativna grupa) ki
ima dodatno lastnost da ima neki.

$X_0 \neq \emptyset$ (npr. prazen skup)

Ako $X_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X_0$

Ako $\exists x \in X_0$ sledi da $\exists (-x) \in X_0$,

a ako je $(-x)$ tvoj problem onda jst da
 $x + (-x) = 0 \in X_0$.

Če je $\forall x$ i $\forall (-x)$ i $\forall 0$ je enostavno
najde na pravila (1-4) za v.p.

Nul-vektor i n-jele prostori $X(\mathbb{R}^3)$ (36)
primljeni na polprostora. Oni se
tako nazivaju podprostori.

Pravac ili ravni su linije i su istodimenzionalni
podprostori $\mathbb{R}^3$ primljeni
na ne-trivijalnih podprostora. (pravci)

$\vec{0}, \dots$ je vektorski prostor sam u sebe

$$\boxed{E^3}$$

$$\mathbb{R}^3 \text{ mod } \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^3 \dots$ vektorski prostor

E^3 je sumarna linija znači da se
svaka oliska skalarni produkt
dva vektora $\vec{a}, \vec{b}$

Alto je: $Y = X_1 + X_2$

i pri tome prikaže podprostor elementa

$$y = x_1 + x_2 \quad (y \in Y)$$

jednomaćan, tj. ako su $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

jednomaćno odnosi vektoru y ,

onda se summa o tim vektoru

zove direktna summa i označava se:

$$X_1 + X_2$$

Summa $Y = X_1 + X_2$ je direktna onda i
semo onda ako nul-vektor iz Y ima
jednomaćan prikaz oblika

$$x_1 + x_2 \quad (x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$$

Linearna mnogostrukost (34)

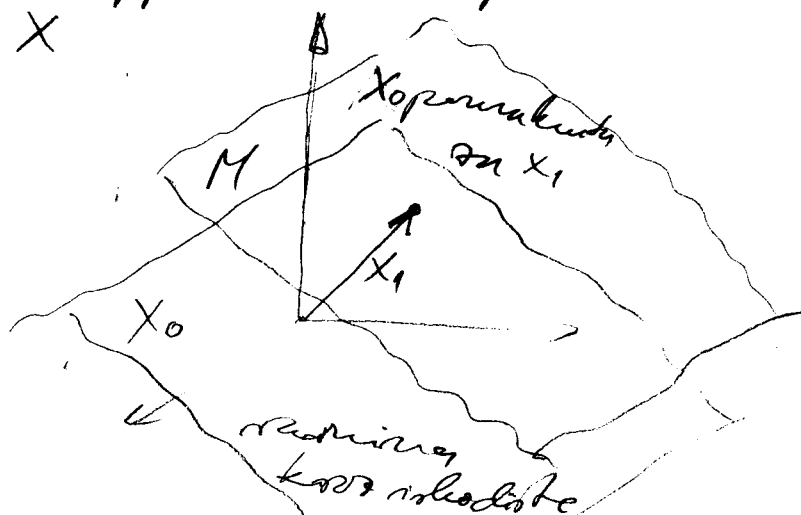
Def. $\subseteq$ (podskup) M je linearna mnogostrukost ako je:

$$M = x_1 + x_0 \quad (\text{skup sili vektora})$$

gdje je:

$x_0 \dots$ v. pp. od v. p X

$$x_1 \in X$$



Teorem: Neka su x_1 i x_2 v. pp. od X
 $x_1 \cap x_2$ je v. pp od X

Dokaz: x_1 je prostor i x_2 je prostor
 pa i jedan i drugi sadrži nulu,
 a ako dva sadrže nulu i
 njihovo presječe sadrži nulu.

$$x \in (x_1 \cap x_2) \Rightarrow (-x) \in (x_1 \cap x_2)$$

$$x \in (x_1 \cap x_2) \Rightarrow \alpha x \in (x_1 \cap x_2)$$

Linearna kombinacija

Neka je X v.p. nad Φ

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = y$$

y je linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$

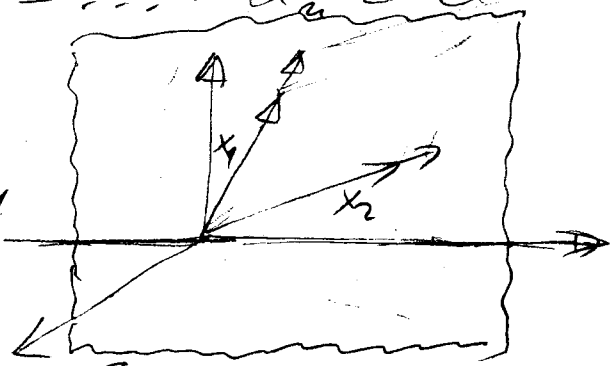
Definicija: Vektore $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ nazivamo linearno nezavisnim ako je:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \vec{0} \Rightarrow$$

Ovo je jedino moguće ako je:
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Primeri:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = y$$



Rezultat je cijela ravnina u kojoj leže x_1 i x_2

Definicija (dualna)

Vektore $x_1, x_2, \dots, x_n$ m. linearno zavisni, ako postoji linearna kombinacija:

* Ako je: $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$ (zavisni vektori)
znači da je barem jedan $\alpha_i \neq 0$

Pretpostavimo: $\alpha_1 \neq 0$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

ali $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1^{-1}$

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Ako su vektori zavisni onda je jedan linearna kombinacija ostalih

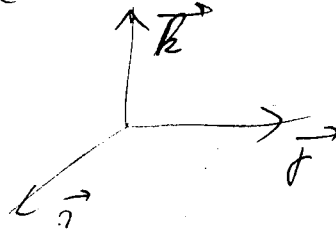
Dimenzija
Definicija: v.p. X ima
 dimenziju n i. l. krakó pisanca:
 $\dim X = n \in \mathbb{N}$

ako postoji n -linearno
 nezavisnih vektora $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$
 takih da je $\forall x \in X$
 linearna kombinacija vektora $x_1, \dots, x_n$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$E^3 \dots$ dimenzija je 3, i. l. n
 potrebno 3 vektora da se
 dobije lin. krakó. vektora.

$E^3 \dots$ Euklidovski prostor



$\alpha_i \vec{i} + \beta_j \vec{j} \dots$ otaje se n

vektori X, Y i ne mogu se
 pitati dobiti $\vec{k}$

Definicija: ako v.p. nema
 dimenzija to znači da je
 dimenzija prostora ∞ .

Definicija: ako X nije
 konačno dimenzionalan
 onda je on beskonačno
 dimenzionalan.

Takvi su vektori funkcije:

Primer: $y'' + y = 0$

(40)

Rješenje su neke funkcije
jedno od rješenje je 0

Ali li rješenje je αy onda je
 αy također rješenje $\alpha \neq 0$

$$(\alpha y)'' + (\alpha y) = 0$$

$$\alpha (y'' + y) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Ali je y_1 rješenje

$$(y_1)'' + y_1 = 0$$

$$(y_2)'' + y_2 = 0$$

$$(y_1)'' + (y_2)'' + (y_1 + y_2) = y_1'' + y_1 + y_2'' + y_2 = 0$$

Skup rješenja je linearni $y'' + y = 0$

je jedan vektorski prostor

Rješenja su: $0, y_1, \alpha y_1, \dots$

Jedno zanimljivo rješenje:

$$y_1 = C_1 \sin x$$

$$y_2 = C_2 \cos x$$

Rj: $\frac{C_1 \sin x}{C_1 \sin x + C_2 \cos x}$ je rješenje:

Ne može se postići

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

To su 2 nezavisna vektora

Treba vidjeti da $y'' + y = 0$ ima

2 rješenja i tako dokazati da

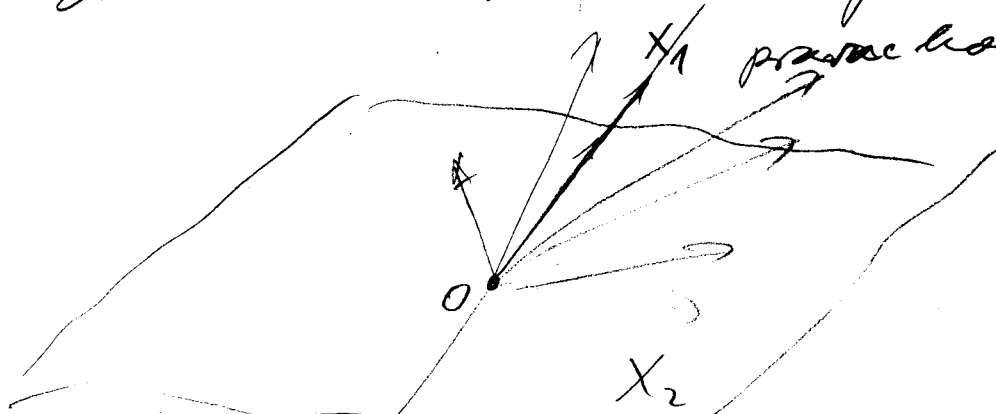
je dimenzija točno 2.

Dokaz: preko th. egzistencije (Cauchy-ov)

Definicija: Neka su X_1 i X_2 v. p. od X (41)

Neka je $X_1 \cap X_2 = \{0\}$
(VIDI STR 36 i 37)

Skup točaka $X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \text{ po svojstvu}$
da je: $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ je novi
prostor koji nazivamo
direktnom sumom prostora X_1 i X_2
 X_1 pravac kao pp.



Što je ta suma prostora X_1 i X_2
 $X_1 + X_2 = X$

Ovdje se bježi po linearnoj algebri
i teoriji matrica

Provjerimo da je $X_1 + X_2$ v. p.

1. $0 \in X_1 + X_2$

2. $x \in X_1 + X_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2$

Očito je i $(-x_1) \in X_1$, jer je da i x_1

Ali je $x_2 \in X_2$ i $(-x_2) \in X_2$

Treba vidjeti da je

$$-x = -x_1 + (-x_2) \in X_1 + X_2$$

Vidi se i da je

$$\alpha x \in X_1 + X_2$$

E^3 je 3-jednodimenzionalan v. p.

Matrica X

x_1				
	x_2			
		x_3		
			x_4	
				x_5

dolje se postupa tako:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Pojam linearnog operatora

4E

U čemu uglavnom promatramo funkcije koje su definirane na vektorskim prostorima i primaju vrijednosti u vektorskim prostorima. Takvu funkciju zovemo ~~linearni operator~~ Primeri su

1. Diferencijalni operator $x \in X$ na danom skalaru $\alpha \in \Phi$ je operator koji vektoru x pridružuje vektor αx .
2. Rotacija ravnine za kut φ je operator koji vektoru x pridružuje vektor $x' = A(x)$. (A je rotacija)
3. Operator deriviranja je linearni operator koji funkciji iz n -dimenzionalnog prostora pridružuje funkciju u $(n-1)$ dimenzionalnom prostoru.
4. Operator integriranja je linearni operator koji funkciji iz n -dimenzionalnog prostora pridružuje funkciju u $(n+1)$ dimenzionalnom prostoru.
5. Operator koji vektoru x iz X pridružuje njegovu ^(dijelu) komponentu (projekciju) na podprostor X_0 je linearni operator.

Oni su primjeri opravdavaju sljedeću definiciju.
Definicija: Neka su X i Y v.p.-i nad poljem Φ .
 Operator $A: X \rightarrow Y$ zovemo linearnim operatorom, ako je A definiran na X i vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

za sve $\alpha, \beta \in \Phi$ i sve $x, y \in X$

Pojam algebre

(43)

Polarizirani od v.p. X i Y nad tijelom Φ , skup $(X \rightarrow Y)$ svih linearnih operatora sa X u Y obaruje v.p. Ako su prostori X i Y konačno dimenzionalni onda je:

$$\dim (X \rightarrow Y) = \dim X \cdot \dim Y$$

Elementi prostora $(X \rightarrow Y)$ su operatori (funkcije), pa je radi toga struktura tog skupa bogatija nego struktura prostora nad v.p. Elemente tog prostora ne možemo operirati množenjem, jer to nema smisla. $\forall A, B \in (X \rightarrow Y)$ operiranje nije definirano: AB ili BA , ali element prostora $(X \rightarrow Y)$ možemo množiti s elementima prostora $(Y \rightarrow Z)$.

Pokazuje se da kompozicijom (produktom) dvaju operatora $A, B \in (X \rightarrow Y)$ nastaje ako se uzme $Y = X$. U tom slučaju je kompozicija, tj. produkt AB , uvijek definiran i šta više $AB \in (X \rightarrow X)$.

Prema tome polarizirani od v.p. X nad Φ določimo do novog v.p. $(X \rightarrow X)$, čiji elementi uvijek možemo množiti među sobom po množenju.

To množenje ima svojstva:

1. $(AB)C = A(BC)$

2. $(A+B)C = AC + BC$ i $A(B+C) = AB + AC$

Odnosno to množenje ne mora biti komutativno

3. $AB \neq BA$

Vektorski prostor u kome je definirano množenje s navedenim svojstvima zove se algebra.

Definicija linearne algebre (44)
 Vektorski prostor X nad poljem Φ je
 linearna algebra nad Φ ako je definirano:

$$X \times X \xrightarrow{\cdot} X$$

$$(x, y) \mapsto xy \in X$$

i ako vrijede pravila

$$1. (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \quad \text{linearnost}$$

$$2. (x \cdot y)z = x(yz) \quad \text{asocijacija}$$

$$3. (x+y)z = xz + yz \quad \text{distribucija}$$

Najjednostavnija lin. alg. u polinomnom

skupu svih polinoma:

$(P(t), +)$ je v. p. nad $(R, +, \cdot)$

$$P_1(t) + P_2(t) = P_3(t)$$

$$\alpha P(t) = \alpha \left(\sum_{i=0}^n a_i t^i \right) = \sum_{i=0}^n (\alpha a_i) t^i$$

$$1. (\alpha P_1) P_2 = P_1 (\alpha P_2) = \alpha (P_1 P_2)$$

$$2. (P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3)$$

$$3. P_1 (P_2 + P_3) = P_1 P_2 + P_1 P_3$$

Ako bi postojao jedan objekt I koji
 bi imao svojstvo da je:

$$x \cdot I = I \cdot x = x \quad I \in X$$

onda je to jedinica algebre

Pažljivo možemo pisati:

$$4. x \cdot y = y \cdot x \quad \text{komutativna algebra}$$

Ako se iz definicije odnosi 2. tj.

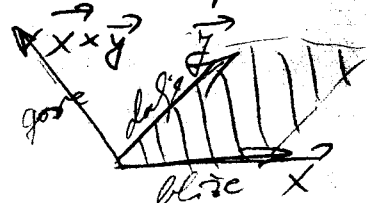
da je asocijativna onda se to zove:

neasocijativna algebra (napr. X (etc) produkt)

$$\alpha \cdot \vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \alpha \vec{y} = \alpha (\vec{x} \times \vec{y})$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$$

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$$



45

$$\dim A = \dim X$$

algebra realica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na celini vzhodna in linarna
parazitska, jst se razvijem
jedruja s drugimi ne more dobiti
isto fejs. od ostalih

$$A = a_{11}[e_1] + a_{12}[e_2] + a_{21}[e_3] + a_{22}[e_4]$$

Is to je jedna četverodimenzionalna algebra
Kovij se algebr može repraviti jedna
manja algebra

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ironosfud... prijek isto stvar, problema

Linearna preslikavanja

(46)

Definicija: Funkciji A (matrica) sta
v.p $X \xrightarrow{A}$ v.p Y nazivamo

linearnim operatorom ako vrijedi:

$$1. A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$2. A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

X i Y su v.p nad istim poljem Φ

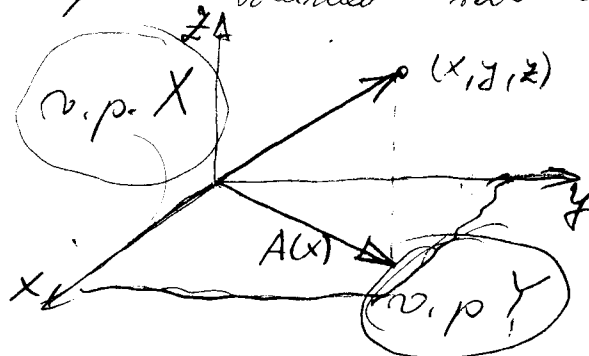
$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

Ovo su linearna preslikavanja:

Primjer: Projiciranje

$E^3 \rightarrow E^2$
volumen ravnina

Projiciranje je
moguće provesti u
bilo koji v.p
(napr. pravac)

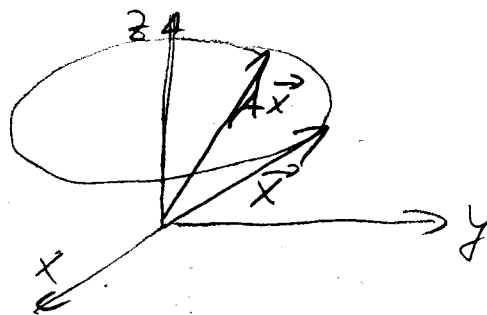


Primjer Rotacija

$E^3 \rightarrow E^3$

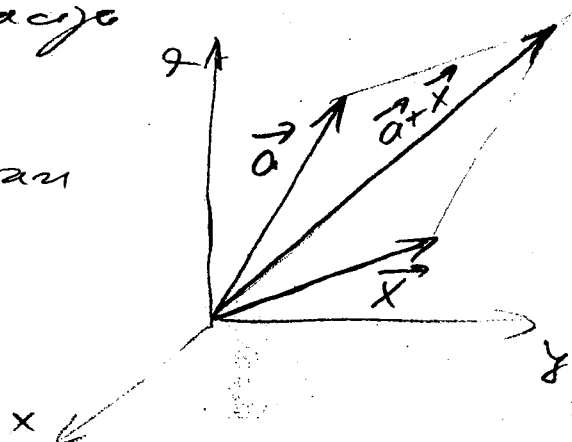
Rotacija obrye je
rot I + rot II

Rotacija je moguća
oko bilo kojeg pravca



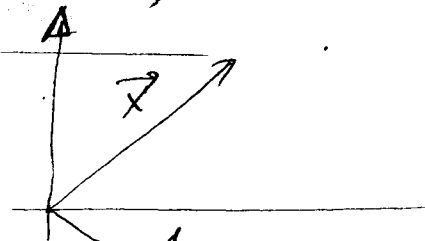
Primjer: Translacija

Kadamo da je
vektor $\vec{x}$ transliran
sa vektor $\vec{a}$
dobije se $A(x)$



Primeri: linearnost (ovna)

(47)



Transformacija linearnost
prostorova je opet linearna prostorova

Primeri: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Linearna: 1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Cauchy-ova funkcionalna jednačina

Apriori je evidentno:

$$f(x) = c_1 x$$

$$f(y) = c_2 y$$

$$x=y=x$$

$$f(2x) = 2f(x)$$

$$f(nx) = n f(x)$$

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q} f(x)$$

$$x=0=y=0$$

$$f(0) = 2f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$c=1 \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}(1) = \frac{p}{q} c$$

$$\lim f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\lim \frac{p}{q}\right) = f(x) = x \cdot c$$

ako je f neprekidna funkcija

* Cauchy-ova funkcionalna jednačina

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Ali f ima derivaciju

$$f'(x+y) = f'(x) = ?$$

$$f'(y) = f'(0) = c$$

$$f(y) = cy + k = 0$$

Misal jika A dan $X \rightarrow Y$ linear dan preskalaranya (28)
 dimana $X = m$, dan $Y = n$

Postoji vektori $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ sa svojstvom:

1. linearno nezavisni
2. Uvijekmo neki vektor x i on je linearna suma:

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j \quad x \in X$$

Potrzebujemy także $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ są wyznaczone

1. liniowo niezależne
2. stworzono wtedy ich z liniowo zależne

$$y = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j \quad y = Y$$

Yakovom e odneseno f rabaki nuo
jedem lasku i o tim bezarna
površno izdati svaki volteru
tom prostoru

Vektori e odnosno f ne moraju biti međusobno definirani (po položaju repr. u E^3)

$$A: X \rightarrow Y$$

$$A(x) = A\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^m A(\alpha_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot A(e_i)$$

Dikur $\frac{1}{2}$ mali lësho $\frac{1}{2}$ të lëviz $\frac{1}{2}$ pjesa
 e gjelbra me shprehje x dhe tjetra
 mali lësho me gjelbra me shprehje

Preslikavanja:

48

$$A(e_1) = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{12}f_2 + \dots + \alpha_{1n}f_n$$

$$A(e_2) = \alpha_{21}f_1 + \alpha_{22}f_2 + \dots + \alpha_{2n}f_n$$

$$A(e_i) = \alpha_{i1}f_1 + \alpha_{i2}f_2 + \dots + \alpha_{in}f_n$$

$$A(e_m) = \alpha_{m1}f_1 + \alpha_{m2}f_2 + \dots + \alpha_{mn}f_n$$

Dolajše se jedan sloj koeficijenta α koji
vše preslikavanja vektora e u vektore f .

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = A(e, f)$$

Ovo je matrica A u odnosu na baze e i f

$$A(e, f) = [Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m]$$

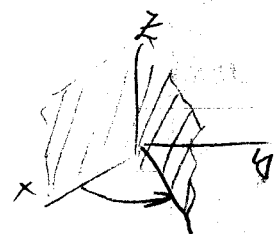
Primer: Rotacija na ravnini za 45°

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{novi} \\ \text{vektor} \end{bmatrix}$$

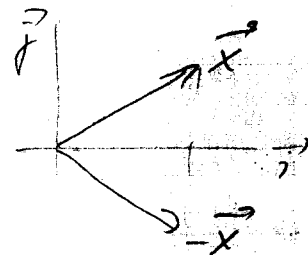
Rotacija za 45° u osi z

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x & \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Simetrija oko osi x

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} i &= 1x - 0y \\ j &= 0x - 1y \end{aligned}$$



Definicija:

Postoji dva linearna prostora X i Y nad poljem Φ i neko je zadano preslikavanje

$$X \xrightarrow{A} Y$$

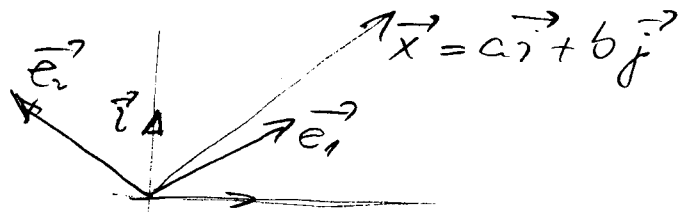
dim $X = m$ dim $Y = n$

Postoji vektori $e_1, e_2, \dots, e_m$ i $f_1, f_2, \dots, f_n$
baza vektorskog prostora

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \quad x \in X \quad ; \quad y = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \quad y \in Y$$

Postoji i ne vektorskih baza

$$x \in e_1 \quad \angle 90^\circ \quad x \in e_2$$



Linearno preslikavanje f

$$A : X \rightarrow Y$$

$$1. A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

$A \dots$ lin. operator

$$2. A(\alpha x) = \alpha Ax$$

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 \quad (1. i 2. zajedno)$$

Linearno preslikavanje: rotacija, translacija,
ose osim rotacije, projekcije, homotetije
* homotetija ... razvlačenje i skraćivanje
vektora iz jedne tačke

Onda iz $X \xrightarrow{A} Y$ (odgovarajući preslik. lin. op. na Y)

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A e_i = y \in Y$$

Tada su to i preslikavanja baza e_i tj.
u što se preslikava $A e_i$ pa se zna sve

$$A e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dovršavaju se jednačinama} \\ \text{ove brojeve, a što se one} \end{array} \right.$$

napisati na odgovarajući način

$$\begin{bmatrix} A e_1 & A e_2 & \dots & A e_m \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [A e_1, A e_2, \dots, A e_m]$$

Definicija: ovakva $(X \rightarrow Y)$ (50)

ovakva skup svih linearnih operatora
na v.p. X u v.p. Y
ili je skup reguliranih linearnih operatora
i ovakvi su $A(e, f)$

Teorema: $(X \rightarrow Y)$ je v.p. na Φ
 $A, B \in (X \rightarrow Y)$

Definicija:

1. $(A+B)(x) = Ax + Bx$ $x \in X$
2. $(\alpha A)(x) = \alpha Ax$ $\begin{cases} x \in X \\ \alpha \in \Phi \end{cases}$

$$0 \in (X \rightarrow Y)$$

$$0(x) = \vec{0} \text{ (nula vektor u prostoru } Y)$$

Dokaz teorema da skup svih
linearnih operatora čini v.p.

$$1. (A+B)(x_1+x_2) = A(x_1+x_2) + B(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 + Bx_1 + Bx_2 = (A+B)x_1 + (A+B)x_2$$

$$2. \alpha A \text{ je linearni operator}$$

$$3. (A+B)(\alpha x) = \alpha(A+B)x$$

$$4. 0 \text{ nula je linearni operator.}$$

Tada dokazati da je to l.o.

$$1. (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$2. (A+0) = 0+A = A$$

$$3. A+(-A) = 0$$

$$4. A+B = B+A$$

$$5. \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$6. (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$7. \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$8. 1 \cdot A = A$$

Dokazati još i tvrdnju da je skup svih l.o. vekt. prost. Φ

$$\left. \begin{array}{l} \dim X = m \\ \dim Y = n \end{array} \right\} \dim(X \rightarrow Y) = m \cdot n$$

Dimenzja:

$$\dim X = \dim Y = 2$$

$$A \in (X \rightarrow Y)$$

$$A(e_i, f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Neka je: $A = [a_{ij}]$; $B = [b_{ij}]$

$$(A+B) = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bilo koja matrica...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{21}E_3 + a_{22}E_4$$

... je linearna kombinacija vektorske baze $E_1, \dots, E_4$. Dimenzija je $2 \cdot 2 = 4$

Primer: Specijalni slučaj preslikavanja:

$$X \rightarrow X \quad (\text{preslikavanje u sebe})$$

To odgovara kvadratnoj matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Teorema: Linearno preslikavanje

$$A \in (X \rightarrow Y)$$

A djeluje na X

$$AX = \{y \in Y \mid y = Ax\}$$

Ako je A proporcionalno, svi su ~~vektori~~ ~~operatori~~ A

~~...~~

Ako op. A je v. pp. op. A.

Dokaz teorema: do je linearni p. (58)
vektorski podprostor.

$$A(0) = ?$$

$$A(x-x) = A(x) + A(-x) = A(x) - A(x) = 0$$

$$A(0) = 0$$

$$\in X \quad \downarrow \in Y$$

$$0 \in \text{Im } A$$

Neka su y_1 i y_2 slike A

$$y_1, y_2 \in \text{Im } A$$

To znači da postoji $\exists y_1 + y_2$

$$Ax_1 = y_1$$

$$Ax_2 = y_2$$

$$A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

$$y_1 + y_2 \in \text{Im } A$$

$$\alpha y_1 \in \text{Im } A$$

$$Ax_1 = y_1$$

$$\alpha Ax_1 = \alpha y_1$$

$$A(\alpha x_1) = \alpha y_1 \in \text{Im } A$$

Teorema: Neka je A l.o. $A \in (X \rightarrow Y)$

$$N_A = \{x \in X \text{ sa svojstvom } Ax = 0\}$$

N_A ... nuliste tj. v. pp. od X .

Bi vektorski liniji vektor x prošao u nuli čime v. p.

Operator je linearni i od nula u nulu, pa je nul-prost. i od nula u nulu. Ako je operator singularan do je lin. operator, jer sve iđi u nulu.

$$x_1, x_2 \in N_A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$\{Ax_1 = 0; Ax_2 = 0\} \rightarrow \alpha \rightarrow \phi$$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 = Ax_2 = \phi$$

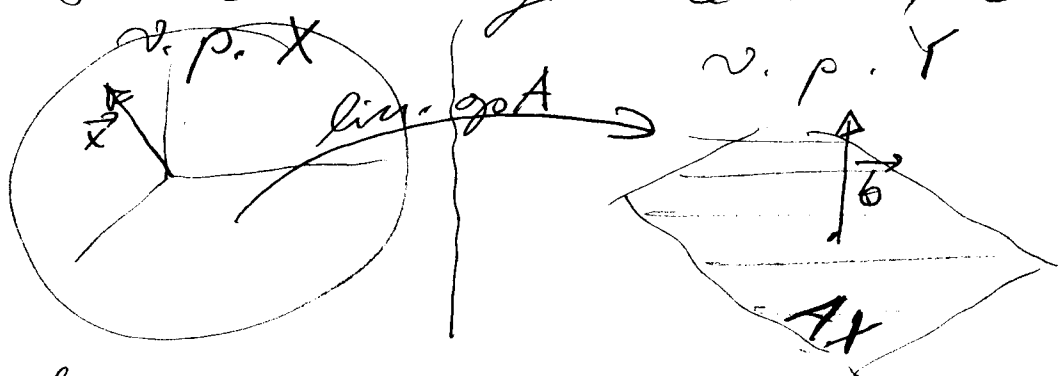
Teoremi: Pitagorj je linearna sistema

$$Ax = b$$

ima rješenje.

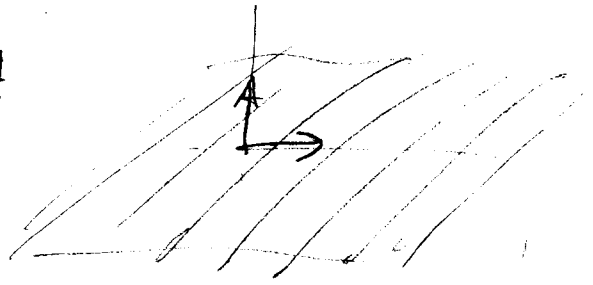
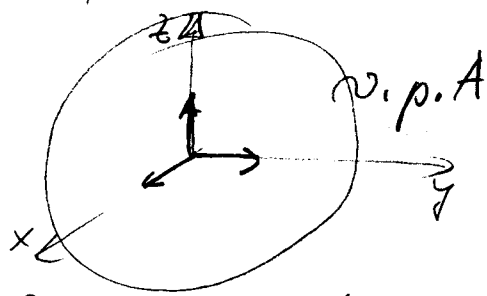
$n = m$ (kvadratna matrica)

- samo ako je $\det A \neq 0$



Sistem ima rješenje ako b leži u podprostoru A

$$b \in \text{Im } A$$



Isto v.p. A je nadruka

AX ... jedno do jedno

$ae_1, ae_2, ae_3, \dots, ae_n$

Može se desiti da neki vektori imaju
sliku u neki mogu prestatiti jednaki
u drugom i dr. tj. oni vektori ne
moraju biti linearno nezavisni

$$\dim(Ax) \leq n$$

$$\dim(Ax) < \dim Y$$

Preobraziv vektor: $ae_1, ae_2, \dots, ae_n$

razapinje vektorski pp. $AX \subset Y$

$$AX \in \text{Im } A$$

$$A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (Ae_i)$$

Broj linearno nezavisnih vektora $\{Ae_1, \dots, Ae_n\} \in Y$ je dimenzija

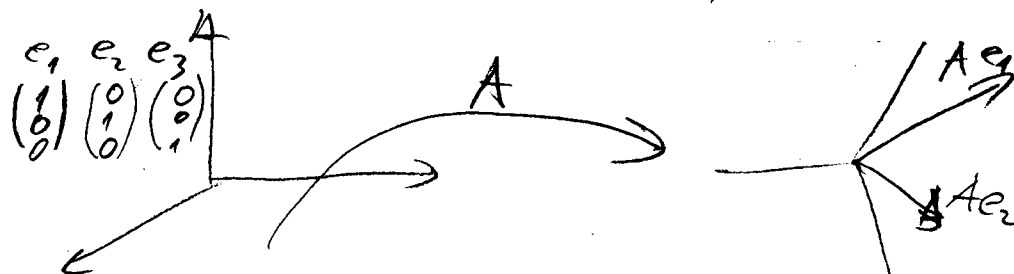
Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(3)} \xrightarrow{A} Y^{(3)}$$

(55)

$$Ae_1 = \sum A, Ae_2 = \sum A, Ae_3 = \sum A$$



Treba ustanoviti da li su Ae_1, Ae_2, Ae_3 linearno nezavisni.

~~Dimenzija~~ dimenzija vektora.

Regularna matrica sadrži dimenziju
singularna matrica ima dimenziju

Imamo sistem jednačina

$$Ax = b$$

$$b \in \sum A$$

ima rešenja b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 2 & 1 & 1 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Sistem ima rešenja ako se
dodavanje stupca b ne
promeni rang matrice.

$$\text{rang}[A] = \text{rang}[A; b]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 2 & 1 & 1 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

vidi
Klausur
10
Haus

Rezime:

(56)

Skup $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$ zove se algebra nad tijelom Φ , ako,

a) $\mathcal{A}$ je v.p nad Φ

b. u $\mathcal{A}$ je definirano množenje (općenito asocijativno) koje svakom uređenom paru $A, B \in \mathcal{A}$ pridružuje jedinstven element $A \cdot B$. Pri tome množenje ima sljedeća svojstva:

1. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ i $A(\alpha B) = \alpha(AB)$

2. $(AB)C = A(BC)$

3. $A(B+C) = AB+AC$ i $(A+B)C = AC+BC$

za sve $A, B, C \in \mathcal{A}$ i $\alpha \in \Phi$

Ako je Φ tijelo realnih brojeva algebra je realna, a ako je Φ tijelo kompleksnih brojeva algebra je kompleksna.

Kazemo da je $\mathcal{A}$ algebra s jedinicom ako postoji element I za koji vrijedi:

4. $AI = IA = A$ za $\forall A \in \mathcal{A}$.

Element I zove se jedinica ili jedinичni element algebre $\mathcal{A}$.

~~~~~

Ako je:  $A, B \in (X \rightarrow Y)$

Pitamo se kada možemo reći da je:

$$\begin{aligned} A &= B \\ \text{odnosno } Ax &= Bx \quad \text{za } \forall x \end{aligned}$$

Teorem: Dva linearna operatora su jednaka ako se podudaraju na bazi:

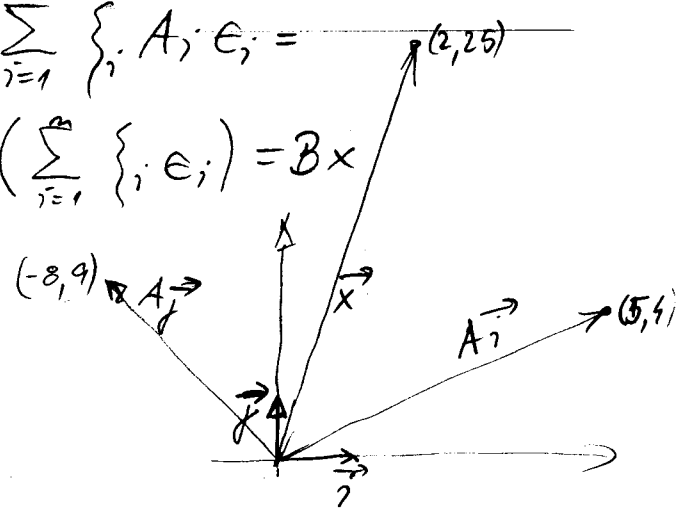
$$A = B \iff Ae_i = Be_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Dotaz levenia:

$$\begin{aligned} Ax &= A \left( \sum_{i=1}^n \{i\} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \{i\} A_i e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \{i\} B e_i = B \left( \sum_{i=1}^n \{i\} e_i \right) = Bx \end{aligned}$$

Prinuzel:

$$\begin{aligned} A\vec{i} &= 5\vec{i} + 4\vec{j} \\ A\vec{j} &= -8\vec{i} + 9\vec{j} \end{aligned}$$



$$\vec{x} = 2\vec{i} + 25\vec{j}$$

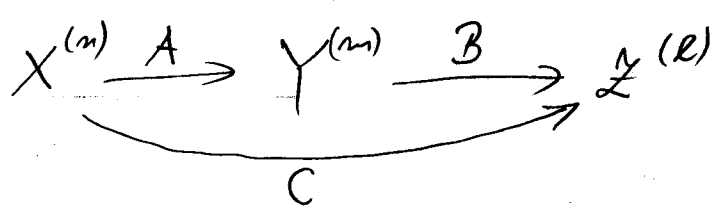
Vektorem A pripada matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A(2\vec{i} + 25\vec{j}) = 2A\vec{i} + 25A\vec{j} = 2(5\vec{i} + 4\vec{j}) + 25(-8\vec{i} + 9\vec{j}) \\ &= (10 - 200)\vec{i} + (8 + 25 \cdot 9)\vec{j} \end{aligned}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 25 \cdot (-8) \\ 2 \cdot 4 + 25 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$A = [\alpha_{ij}]_{(m, n)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$



$$C = B \cdot A = B_{(l, m)} A_{(m, n)}$$

$$B = [\beta_{ij}]_{(l, m)}$$

Opisano:

$$A_{(i, s)} \cdot B_{(s, j)} = C_{(i, j)}$$

C ... poznati ako j i = s

$$A = [a_{ij}]$$

$$B = [b_{ij}]$$

$$\Rightarrow C = AB = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

Prinzip:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} i \\ 3, 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j \\ 3, 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i \\ 3, 2 \end{pmatrix}$

Uočimo element  $c_{22}$  napr.

$$c_{22} = \sum_{t=1}^3 a_{2t} \cdot b_{t2}$$

Da asociativnu algebra vrijedi:

1.  $A(BC) = (AB)C$
2.  $A \cdot 0 = 0$
3.  $A(B+C) = AB+AC$  i  $(A+B)C = AC+BC$
4.  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

Zaključak 1. inače ne opada u algebra  
\* Matrice nisu komutativna algebra!

Prinzip: Skup svih polinoma je jedna dobra algebra  $P(x)$

Neka je  $\mathcal{A}$  algebra nad tijelom  $\Phi$  i  $A, B \in \mathcal{A}$   
Općenito je definirano  $A \cdot B \in \mathcal{A}$   
Specijalno je definirano  $A \cdot A = A^2 \in \mathcal{A}$   
 $A^2 \cdot A = A^3 \in \mathcal{A}$

$$A^{n-1} \cdot A = A^n \in \mathcal{A}$$

Događamo  $A^0 = I$

$$p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^n + a_n = 0$$

Polinome možemo shvatiti i kao niz matrica  
ili ih možemo s linearnim koeficijentima.  
Neka su  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$  matrice i su  
njih može i da bude.

# Minimalni polinom

(59)

$M_{nn} \dots$  kvadratna matrica je linearni operator na  $X$  u  $X$  ( $X \rightarrow X$ ) v.p. nad  $\Phi$

$A \in (X \rightarrow X)$ ,  $\dim X = n$ ,  $\dim (X \rightarrow X) = n^2$

$I \dots$  jedinični element

$$A = \alpha I = \alpha (\text{linearno zavisni vektor}) I$$

Pretpostavka je da su vektori linearno nezavisni. Ako može postojati od linearno nezavisnih vektora do određene (dimenzije)<sup>m</sup> (rela) vektori su linearno nezavisni, a onda postoji linearno zavisni.

Da zadani  $A$  jednoznačno je određen broj  $m$   $I, A, A^2, A^3 \dots A^{m-1}$  lin. nezav. vekt.

$A^m \dots$  linearno zavisni vektori

Vektori <sup>također</sup> su lin. zavisni ako su im lin. kombin. jednake nuli, ali pod usjetom da su koeficijenti niti nula.

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} A + \mu_m I$$

$$\mu(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \mu_2 \lambda^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} \lambda - \mu_m$$

Ako nam je do  $\lambda$  stavimo  $A \Rightarrow$

$\mu(A) = 0$   
 $\mu(A) \dots$  minimalni polinom odnosi na  $A$  je polinom najnižeg stepnja kojim matrica  $A$  poništava.

Teoremi: Ako je  $p(A) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p(\lambda) = q(\lambda) \cdot \mu(\lambda)$

Ako matrica  $A$  poništava neki polinom onda je taj polinom djeljiv sa minimalnim polinomom bez ostatka.

# Minimalni polinom (ne operatora) (60)

$$\underbrace{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}}_{\text{linearno nezavisni}}, A^n$$

linearno nezavisni

Kad se doda ovaj vektor  
vektor postaje linearno  
zavisni

linearna kombinacija ostalih vektora

Postoji da postoji broj

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n$  iz  $\Phi$  takvi da je:

$$A^n = \mu_1 A^{n-1} + \mu_2 A^{n-2} + \dots + \mu_{n-1} A + \mu_n I$$

Budući da su vektori skupa  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$   
nezavisni, to govori jednadžbe slijedi da  
su i brojevi  $\mu_1, \dots, \mu_n$  jedinstveno  
određeni sa  $A$ . Dakle i polinom:

$$\mu(\lambda) = \lambda^n - \mu_1 \lambda^{n-1} - \dots - \mu_{n-1} \lambda - \mu_n$$

jedinstveno određen elementom  $A$ .

Pomoću gornjeg polinoma relaciji sa  $A$   
poprima jedinstveni oblik:

$$\mu(A) = 0$$

Interpretiramo da je  $p(\lambda)$  polinom i  $p(A) = 0$ .

Dijeljenjem  $p(\lambda)$  sa  $\mu(\lambda)$  dolazi se:

$$p(\lambda) = q(\lambda) \mu(\lambda) + r(\lambda) \rightarrow \text{ostatak dijeljenja}$$

stupanj  $r(\lambda) < \text{stupanj } \mu(\lambda)$

Radi ove nejednadžbe i linearnosti nezavisnosti  
skupa  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  svi koeficijenti

polinoma  $p(\lambda) = 0$

slijedi da je  $r(\lambda) = 0$

Posto je  $p(A) = 0$  tj. kad umjesto  $\lambda$  stavimo  $A$

$$p(A) = 0 = q(A) \mu(A) + r(A) = 0$$

Slijedi da  $\mu(A)$  mora biti jednako nuli  
 $\mu(A) = 0$

## Recipročni element

64

Koristi: činjenicu da je  $\mathcal{A}$   $n$ -dimenzionalna algebra nad tijelom  $\Phi$  svaki element  $A \in \mathcal{A}$  zadovoljava jednadžbu oblika

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} A + \mu_m I$$

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Phi)$$

gđ.  $A$  je nula svog minimalnog polinoma. Pretpostavimo da je slobolec. Tada  $\mu_m$  minimalnog polinoma  $\mu(\lambda)$  elementa  $A$  različit od nule?

$$\mu_m I = A^m - \mu_1 A^{m-1} - \mu_2 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} A$$

$$I = \frac{1}{\mu_m} A [A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I] =$$

$$= \frac{1}{\mu_m} [A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I] A$$

$$B = \frac{1}{\mu_m} [A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I]$$

$$C = \frac{1}{\mu_m} [A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I]$$

$$I = A \cdot B$$

$$I = C \cdot A$$

$$\Rightarrow C = B$$

$C = B$  ... recipročni element od inverzije

$$\begin{cases} I = A \cdot A^{-1} \\ I = A^{-1} \cdot A \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\mu_m} [A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \dots - \mu_{m-1} I]$$

$\exists$  (postoji)  $A^{-1} \Leftrightarrow$  ako je  $\mu_m \neq 0$

Definicija: Element  $A$  je regularan ako postoji  $A^{-1}$ , a ako ne postoji  $A$  je singularan element.

Teorem: Neha je  $GL(n, \Phi)$  skup svih  $(68)$   
 regularnih matrica reda  $(n, n)$  (kvadratna).  
 Definicijama navedenim gore je matrica  
 kao grupna operacija.  $(69)$

1.  $GL(n, \Phi)$  je opća linearna grupa matrica  $n$ -tog reda.
2. Ako su dvije homomorfne dimenzionalne algebre ~~isomorfne~~, onda su ~~isomorfne~~ i pripadajuće grupe ~~derivata~~ derivata. Ili algebre
3.  $A$  je reguloran  $\Leftrightarrow$  ako je  $\mu_n \neq 0$   
 $\mu_n \dots$  slobodan član u minimalnom polinomu.

Neha su  $A, B \in GL(n, \Phi)$   
 regularne matrice tj. postoji  $A^{-1}$  i  $B^{-1}$ .  
 Da li je  $A \cdot B$  regularna matrica?  
 Tvrdimo da je:  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$   
Dokaz:  $A \cdot B (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A (B B^{-1} \cdot A^{-1}) =$   
 $= A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

- Teorem:  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Dakle, ako je  $A, B \in GL(n, \Phi) \Rightarrow A \cdot B \in GL(n, \Phi)$
1. Zakon asocijacije vrijedi:  
 $(AB)C = A(BC)$
  2. Jedinična matrica je regularna  $A \cdot I = I \cdot A = A$
  3. Ako je  $A$  regularna  $\exists A^{-1}$   
 More se dokazati da i  $A^{-1}$  ima inverz.  
 $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Da element  $A$  koji posjeduje recipročan  
 element kažemo da je ~~invertibilan~~ ili  
 invertibilan. Ako  $A$  nije reguloran on je singularan  
 homomorfizma... ~~ne postoji inverz~~, ~~invertibilan~~

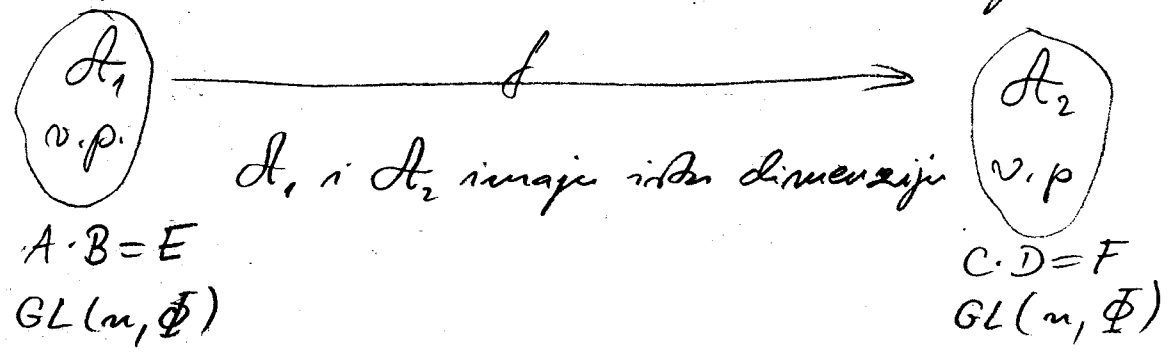
Grupa  $GL(n, \mathbb{F})$  je linearna jedina od najvažnijih grupa!

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2$$

Ovo se ponavlja kao realni brojevi i obzirom na množenje.

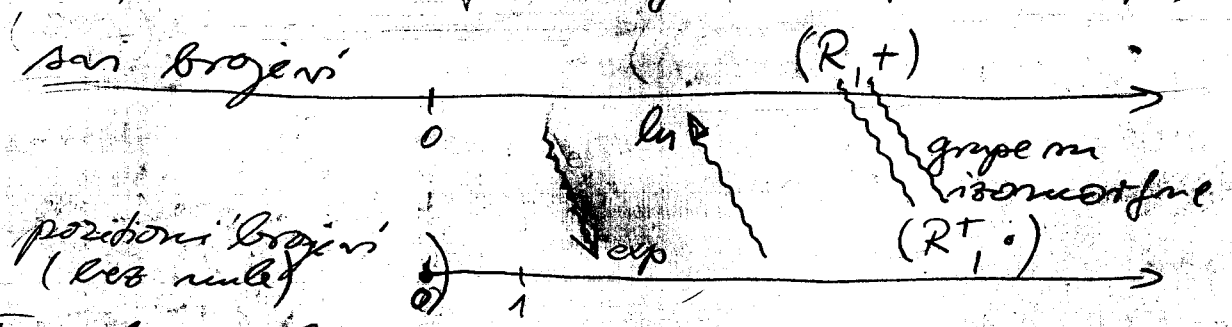
Postojakiramo da imamo drugu algebru:



1.  $f(A+B) = f(A) + f(B)$
  2.  $f(\alpha A) = \alpha f(A)$
  3.  $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$

$\left. \begin{array}{l} \text{ovo je izomorfizam} \\ \text{f... je bijekcija} \end{array} \right\}$

Primjer: Izomorfna grupa  $(\mathbb{R}, +)$  i  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$



Funkcija koja omogućava izomorfizam je gotje primjer je  $e^x$ . Ona prevodi "+" u "·".  
Inverzna funkcija je  $\log(x)$

Teorem: Neka je  $\lambda \in \Phi$  (64)

$\Phi$  je sklop realnih i kompleksnih brojeva.

Definirajmo:  $\lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$

$A$  je unaprijed zadana matrica!

Funkcija  $R_\lambda$  zove se rezolventa elementa  $A$

Također neke  $\lambda$  za koje  $R_\lambda$  nije definirana

skup zove se sklop  $\lambda \in \Phi$  za koje  $R_\lambda$

ne postoji zove se spektral elementa  $A$

i označava se sa  $\sigma(A)$ .

Spektar nije velik. Opisi ga teorem:

Teorem: Neka je  $\mathcal{A}$  konačno dimenzionalna algebra nad poljem  $\Phi$  (skup svih  $(n, n)$

matrica) i neka je  $A \in \mathcal{A}$

1. Ako je  $\lambda \in \Phi$  nula minimalnog polinoma  $\mu(\lambda)$  elementa  $A$ , onda je  $\lambda I - A$  singularan element tj.  $\lambda \in \sigma(A)$  (spektra matrice  $A$ )

Ako je  $\Phi$  sklop kompleksnih brojeva, onda  $\sigma(A) \neq \emptyset$  (spektar je različit od nule tj. nije prazan skup)

2. Ako  $\lambda \in \Phi$  nije nula minimalnog polinoma  $\mu(\lambda)$  elementa  $A$ , onda je  $\lambda I - A$  regulan element.

~~U tom slučaju je:~~

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\mu(\lambda)} [A_0 \lambda^{m-1} + A_1 \lambda^{m-2} + \dots + A_{m-2} \lambda + A_{m-1}]$$

Bilo koje matrica iz polinoma je:

$$A_k = A^k - \mu_1 A^{k-1} - \dots - \mu_{k-1} A - \mu_k I; \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

$$A_0 = I$$

3. Za svako  $\lambda$  je:

$$A_0 \lambda^{m-1} + A_1 \lambda^{m-2} + \dots + A_{m-2} \lambda + A_{m-1} \neq 0$$

$\frac{1}{\lambda I - A}$  liči na geometrijski red!

(65)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots$$

Razvijemo u T-red vrlo brzo bismo našli  
njekakvu gotovu funkciju  $\frac{1}{\lambda I - A}$

Dobro razdijelimo:

u relaciji:

$$\mu(\lambda + \nu) = \mu(\lambda) + Q_1(\lambda)\nu + Q_2(\lambda)\nu^2 + \dots + Q_{m-1}(\lambda)\nu^{m-1} + \nu^m$$

gdje  $Q$ :

$$Q_1(\lambda) = \frac{\mu'(\lambda)}{1!}, Q_2(\lambda) = \frac{\mu''(\lambda)}{2!}, \dots, Q_{m-1}(\lambda) = \frac{\mu^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}$$

Imamo element  $B \in \mathcal{A}$  umjesto  $\nu$

i  $\lambda B^0 = \lambda I$  umjesto  $\lambda$ . Dobivamo:

$$\mu(B + \lambda I) = B^m + Q_{m-1}(\lambda)B^{m-1} + \dots + Q_1(\lambda)B + \mu(\lambda)I$$

Uzmemo li:  $B = B_\lambda$  tako da bude  $A = B + \lambda I$

za  $\mu(A) = 0$  slijedi:

$$B^m + Q_{m-1}(\lambda)B^{m-1} + \dots + BQ_1(\lambda) + I\mu(\lambda) = 0$$

Ovo je minimalni polinom za  $B$ .

Pretpostavimo da ovo nije min. pol. za  $B$

Onda je  $\mu(\lambda) = 0 \Rightarrow$  ne postoji  $B^{-1}$

Štaci da li  $A - \lambda I$  isto singularno

Onda je  $\mu(\lambda) \neq 0$  postoji  $(A - \lambda I)^{-1}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\mu(\lambda)} [B^{m-1} + Q_{m-1}(\lambda)B^{m-2} + \dots + Q_1(\lambda)I]$$

Imamo li:  $B = A - \lambda I$  dobivamo:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\mu(\lambda)} (A_0 \lambda^{m-1} + A_1 \lambda^{m-2} + \dots + A_{m-2} \lambda + A_{m-1})$$

Detaljnije detalje vidi: S. Kurepa

Konačno dim. vekt. prostori str. 77, 78, 79.

# Evaluacija minimalnog polinoma matrice

(66)

(S. Kuratowski, 79)

Potražimo minimalni polinom elementa  $A$  osim što moguća da vidimo da li je  $A$  regularno ili ne, daje i eksplisitne formule za  $A^{-1}$  i rezolventu  $(R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1})$ . Zato je poželjno dati postupak za njegovu konstrukciju.

Neka je  $\mathcal{A}_m$  algebra kvadratnih matrica  $n$ -tog reda nad tijelom  $\Phi$ ,  $A \in \mathcal{A}_m$  i

$$\mu(\lambda) = \lambda^n - \mu_1 \lambda^{n-1} - \dots - \mu_{n-1} \lambda - \mu_n$$

minimalni polinom matrice  $A$ . Formirajmo sljedeće:

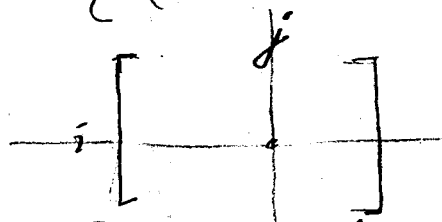
$$\begin{array}{ccccccc} I & A & A^2 & \dots & A^k & \dots \\ & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} & \dots \\ & & A_{22} & \dots & A_{2k} & \dots \\ & & & \dots & & \dots \\ & & & & A_{kk} & \dots \end{array}$$

Eni formule su:

$$\begin{array}{l} A_{11} = A - \beta_{11} I \\ A_{12} = A^2 - \beta_{12} I \\ \vdots \\ A_{1k} = A^k - \beta_{1k} I \\ \hline A_{22} = A_{12} - \beta_{22} A_{11} \\ \vdots \\ A_{2k} = A_{1k} - \beta_{2k} A_{11} \end{array}$$

Ali je  $A = I$

$$\mu(\lambda) = \lambda - 1$$



$A \neq I$  prema tome se može nekih elementa  $n$  i-tom redom i j-tom stupcu

Općenito:

$$A_{k+1,j} = A_{kj} - \beta_{k+1} A_{kk} \quad (j = k+1, k+2, \dots)$$

Prati odaberemo tako da u gornjem  
lijevom uglu matrice  $A_{11}$  stoji  $\lambda$  (6)

Prati odaberemo tako da u gornjem  
lijevom uglu matrice  $A_{11}$  stoji  $\lambda$

Oko  $A_{11}$  naj manje matrice onda znam  $A_{11}$   
na poziciji  $(i, j)$  stoji element  
različit od nule

Prati biramo tako da na poziciji  $(i, j)$   
matrice  $A_{11}$  stoji nula

Oko je  $A_{kk} \neq 0$  to omogućava  
kombinaciju sljedećeg reda.

Pretpostavimo da je:

$$A_{k+1, k+1} = \lambda_k A_{kk} + \dots + \lambda_1 A_{11} + \lambda_0 I$$

$A_{kk} \neq 0$

$$\begin{matrix} & \text{moralit} \\ \begin{matrix} \lambda_{0+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0+1} \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice  $A_{ii}$  na poziciji  $(1, 1)$  imaju nulu  
sljedeći  $\lambda_0$  mora biti nula

$A_{22} \dots A_{kk}$  na poziciji  $(i, j)$  imaju  
element  $\lambda$ . Zaključujemo da  $\lambda_1$  mora biti nula.

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda \quad ; \quad A_{k+1, k+1} = \lambda$$

$$\begin{matrix} \text{Oko je } A_{11} \neq 0 \\ A_{22} \neq 0 \\ \dots \\ A_{kk} \neq 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_k \end{matrix} \right\} \begin{matrix} A_{11} \text{ i } I \text{ (nezavisan)} \\ A_{22}, A_{11}, I \text{ ( -11- )} \\ \dots \\ A_{kk}, A_{k-1, k-1}, \dots, A_{11}, I \text{ ( -11- )} \end{matrix}$$

Vidi primjer na str. 83

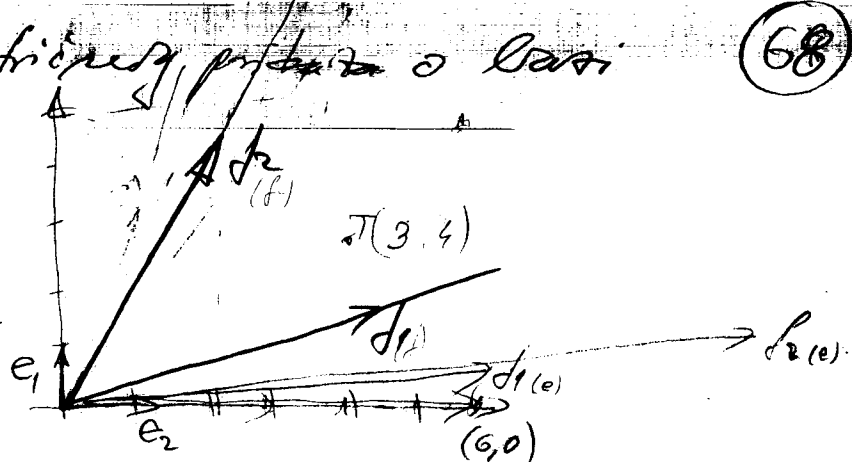
S. Kurepa:

Forme dim. vekt. prostora

# Osnovni matricni pristup o bazi

(68)

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0) \\ e_2 &= (0, 1) \\ f_1 &= (1, 3) \\ f_2 &= (2, 5) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} e_1 &= (1, 0) \\ e_2 &= (0, 1) \\ f_1 &= (1, 3) \\ f_2 &= (2, 5) \end{aligned}} \right\} \text{vektori}$$



Imamo 2 koordinatna sustava:

i  $e_1, e_2$

ii  $f_1, f_2$

Transformacija redine  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (\underbrace{2y}_{x'}, \underbrace{3x - y}_{y'}) = \text{linearna transformacija (linearni operator)}$$

$$\begin{aligned} x' &= 2y \\ y' &= 3x - y \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \text{matrica u bazi } e_1, e_2$$

mapa:  $T(3, 4) = (8, 5)$   $[T(1, 0) \ T(0, 1)] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = T_e$

$$\begin{aligned} T(1, 3) &= (6, 0)_e \\ T(2, 5) &= (10, 1)_e \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} T(1, 3) &= (6, 0)_e \\ T(2, 5) &= (10, 1)_e \end{aligned}} \right\} \text{ovo su koordinatne vektora } f_1, f_2 \text{ u sustavu } e_1, e_2 \text{ (bazi)}$$

Treba naći komponente točaka u sustavu  $f_1, f_2$

Općenito: vektor  $(a, b) = x f_1 + y f_2$

$$\begin{aligned} (a, b)_e &= x f_1 + y f_2 = x(1, 3) + y(2, 5) = \\ &= (x, 3x) + (2y, 5y) = (x + 2y, 3x + 5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= x + 2y \\ b &= 3x + 5y \end{aligned} \quad \left( \begin{aligned} a, b &\text{ su komponente u bazi } e_1, e_2 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} x &= 2b - 5a \\ y &= 3a - b \end{aligned} \quad \left( \begin{aligned} x, y &\text{ su komponente u bazi } f_1, f_2 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_e \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_f$$

iz  $e_1, e_2$  u  $f_1, f_2$

$$T(f_1) = T(1,3) = (6,0)_e = -30f_1 + 18f_2$$

$$T(f_2) = T(2,5) = (10,1)_e = -48f_1 + 29f_2$$

Matrice n darsi  $f_1, f_2$ :

$$T_f = [T(f_1), T(f_2)] = \begin{bmatrix} -30 & 48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix} = T_f$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = T \cdot e$$

Matrice  $T_f$  i  $T_e$  su iste matrice, ali u različitim koordinatnim sustavima

$$a_e = x + 2y$$

$$b_e = 3x + 5y$$

$$x = -5a + 2b$$

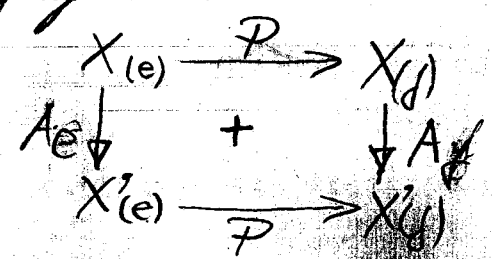
$$y = 3a - b$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{postoji } P^{-1} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$

$P \dots$  matrica prelaza iz "e" u "f"

$P^{-1} \dots$  matrica prelaza iz "f" u "e"

Dijagram prelaza:



$$A[a_{ik}] \quad A^{-1}[a_{ik}]$$
$$a_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}$$
$$A_{ki} = (-1)^{k+i} D_{ik}$$

"u" u dijagramu suoc' do dijagrama komutativ

$$A_f P = P A_e \quad | \quad P^{-1} \text{ lijevo}$$

$$P^{-1} A_f P = P^{-1} A_e P$$

$$A_e = P^{-1} A_f P$$

Rezime: Ovo je samo matematički interesovanje koordinatizaciju ovog vektorskog prostora ( $X \rightarrow X$ ) u danoj različite baze. Tako je u gornjoj relaciji operator  $A$  varirao po algebri  $X \rightarrow X$ , a  $P$  je čvrst regularan operator.

## Sličnost matrice i operatora

(40)

Za razliku od prijašnjeg razmatranja ovde nas zanimaju sve moguće koordinatne i dužnosne vektora  $x \in X$ , odnosno sve matrice koje se pridružuju operatoru  $A \in (X \rightarrow X)$ . Duh je ovde je operator  $A$  čisti operator, a operator  $P$  varira na sve moguće načine

$$Ae = P^{-1} A P$$

Definicija: Matrica  $A$   $n$ -tog reda je slična matrici  $B$   $n$ -tog reda, ako postoji regularna matrica  $T$ , takva da je:

$$B = T^{-1} A T$$

Ovde sličnim matricama nemaju razumljivosti razlika.

Kraće se piše:  $A \approx B$

~~...~~

Problem je odabrati pravi koordinatni sistem tako da matrica projekta izgleda što jednostavnije.

Dakle čim da je relacija " $\approx$ " (slično) u skupu svih matrica  $M_{n,n}$  relacija ekvivalencije. Ekvivalencija ... stvara jednake

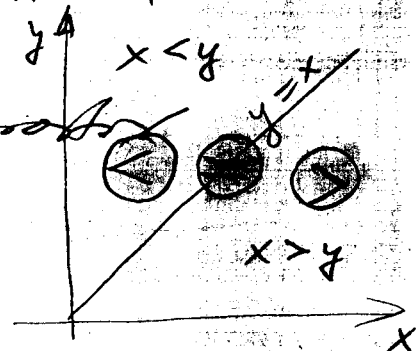
1.  $\varnothing \dots$  relacija  $X \approx X \quad \forall X$  (refleksivnost)
2. ako je  $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$  (simetrija)
3. ako je  $X \approx Y$  i  $Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$  (transitivnost)

Iz ove relacije s ovim svojstvima stvara se relacija ekvivalencije " $\varnothing$ ".

Relacija " $\varnothing$ " je jedan podprostor

$$\varnothing \subseteq X \times X$$

Relacija je dio prostora



# Dokaz da je za matrice „ $\approx$ “ relacija ekvivalencije

(7A)

$$1. A \approx A \quad \text{ili} \quad A = I^{-1} A \cdot I$$

$$2. A \approx B \Rightarrow B \approx A$$

$$A = T^{-1} B T \Rightarrow T A T^{-1} = B$$

$$B = (T^{-1})^{-1} A T^{-1}$$

$$3. A = T^{-1} B T$$

$$B = S^{-1} C S$$

$$A = T^{-1} S^{-1} C S T = (ST)^{-1} C ST$$

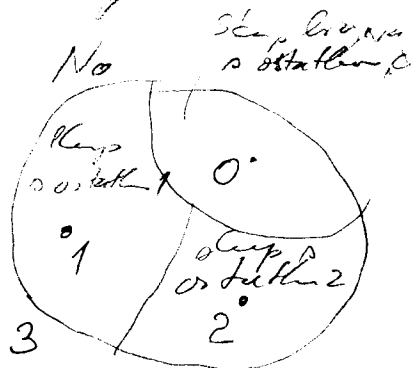
Primer: Uzmimo cijele brojeve zajedno sa

$$N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Odelimo broj 3 te o njemu odelimo sve brojeve i gledajmo koliki je ostatak

ostatak:

|   |              |
|---|--------------|
| 0 | 3, 6, 9, ... |
| 1 | 1, 4, 7, ... |
| 2 | 2, 5, 8, ... |



$x \approx y$  ako je  $x - y$  djelivo sa 3

Prema  $x \equiv_3 y$  i čita se:

$x$  kongruentno  $y$  modulo 3

kongruentno ... opada u istu klasu

" $\equiv_n$ " kongruentno modulo  $n$  je relacija ekvivalencije.

Svi brojevi djelivi sa 3 spadaju u istu klasu "0"

Svi brojevi djelivi sa 3 sa ostatkom 1 spadaju u istu klasu "1"

Svi brojevi djelivi sa 3 sa ostatkom 2 spadaju u istu klasu "2"

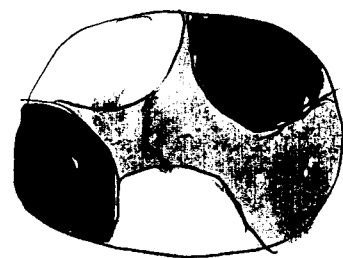
Sada se operacije svedu na tri broja



Definicija:  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \subseteq X$

Podskupovi  $A_1, A_2, \dots$  čine particiju skupa  $X$   $X \neq \emptyset$  ako vrijedi:

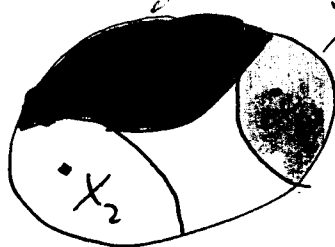
1.  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$
2.  $\cup A_i = X$



Particija ... rastavljanje

Znači relacija ekvivalencije je zadovoljena  
particijom i obrnuto!

Koliko ima particija toliko ima i  
relacija ekvivalencije.



$X \{ \text{skup} \}$

$\approx$  (relacija na skupu  $X$ )

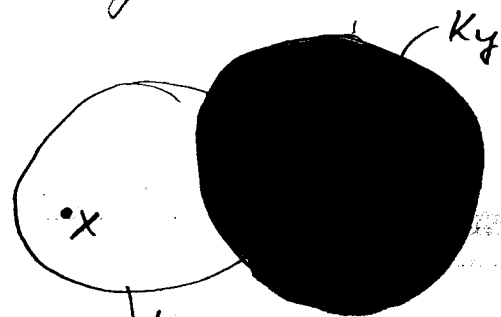
Uzmimo  $x_0$ .  $x_0$  je ekvivalentan  
sam sebi

\* Pretpostavimo da je  $x_0$  ekvivalentan još nekome  
skupu svih  $x \in X \approx x_0$  čine jednu  
klasu elemenata.

$$K_{x_0} \neq \emptyset$$

$$K_{x_1} \neq \emptyset$$

$$K_{x_2} \neq \emptyset$$



Dve klase nisu prazne!

Pretpostavimo da postoji neki element u  
prejaku  $\neq$ .

$$z \in K_x \cap K_y$$

$$3. \quad x \approx z \text{ i } z \approx y$$

$$x \approx y \quad (\text{transitivnost})$$

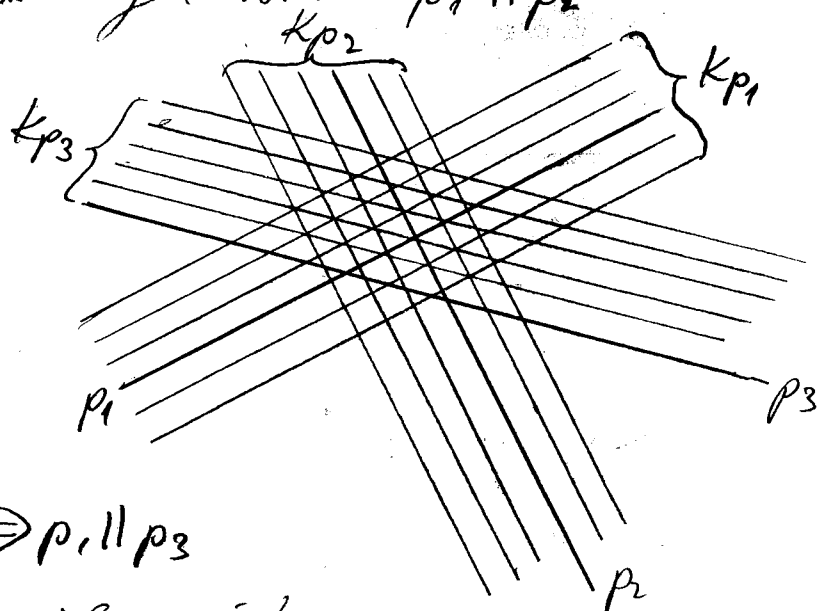
Ali se dvije klase isjetu onda su to  
dvije klase, (u protivnom radi se o  
jednoj klasi). Dakle se zaključak  
da se klase (protivno pretpostavci) ne mogu  
sjeci.

Primeri: Paralelnost pravca in ravnin, jer se n prostoru pravci ne morejo kajčkati:  $p_1 \parallel p_2$

$$p_1 \parallel p_2$$

$$p_1 = p_2 \text{ ili}$$

$$p_1 \cap p_2 = \emptyset$$



1.  $p \parallel p$

2.  $p_1 \parallel p_2 \Rightarrow p_2 \parallel p_1$

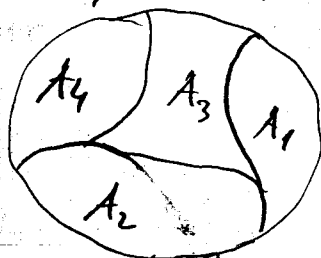
3.  $p_1 \parallel p_2 \wedge p_2 \parallel p_3 \Rightarrow p_1 \parallel p_3$

Klase se ne ožikuj, jer se ne ožiku elementi klase, a to so pravci. Klase se ožiku n točkama (a to nim elementi klase)

Kad se vsaka klase obseva n točka, kao reprezentanta klase dolje se zove pravca.

Sada li mogli reči ožikivanje pravce i doliti li nove klase n poželji.

Zadajmo partitju:



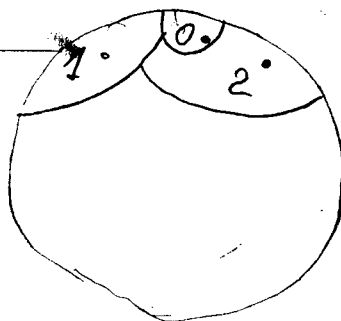
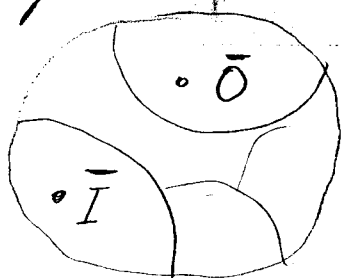
$$x \approx y \iff x, y \in A_i$$

Sad su klase točk profakti ekvivalenurn partitji polji

Partitja na prirodan način daje relacijo ekvivalencije.

Prinzip: Razvrstimo sve matrice  $M(n, n)$

(14)



- Napravimo partitiju matrica po rangju.
- Sve matrice s rangom 0 je nul-matrica i nitiho više.
  - Sve matrice s rangom 1 su matrice koje imaju barem jedan element različit od nule.
  - Sve matrice s rangom 2 su matrice koje imaju barem jednu determinantu drugog reda različitu od nule.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{I}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \bar{I}_p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

$r=0 \qquad r=1 \qquad r=2 \qquad r=3 \qquad \dots \qquad r=r$

$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \dots, \bar{I}_r, \dots$  su jedinične matrice

# Resime!

(46)

1. Operator  $A \in (X \rightarrow X)$ ,  $\dim X < \infty$ ,  
jest regularan  $\iff$ , ako  $Ax = 0$  povlači  $x = 0$
  2. Operator  $A \in (X \rightarrow X)$  jest singularan  $\iff$   
ako postoji barem jedan vektor  $x \neq 0$   
pa svojstvom da je  $Ax = 0$
  3. Ako je  $T \in (X \rightarrow X)$  regularan operator  
i  $e_1, \dots, e_n$  baza u  $X$ , onda vektori  
 $f_1 = Te_1, \dots, f_n = Te_n$  obrazuju bazu u  $X$ ,  
tj. regularan operator bazu prevodi u bazu
  4. Ako su  $e_1, \dots, e_n$  i  $f_1, \dots, f_n$  drugi bazu u  $X$   
onda je operator  $T \in (X \rightarrow X)$ , pa svojstvom  
da je  $f_1 = Te_1, \dots, f_n = Te_n$  regularan
- Tvrđnje 3. i 4. znače i obratno
3. Regularni operator prevodi bazu u bazu  
(tj. ima dobru bazu)
  4. Za ovakve drugi baze postoji regularni operator  
koji prvu bazu prevodi u drugu  
(tj. grupa  $G$  regularnih operatora je "dobro bazna")
  5. Ako je  $X$  kompleksan konačno dimenz. v.p.  
i  $A \in (X \rightarrow X)$ , onda postoji bar jedan  
broj  $\lambda_0$  i bar jedan vektor  $x \in X, x \neq 0$   
pa svojstvom da je:

$$Ax = \lambda_0 x$$

6. Tvrđimo da postoji kompleksan broj  $\lambda$  i  
vektor  $x \neq 0$ , takvi da je  $Ax = \lambda x$ , tj.  
 $(\lambda I - A) = 0$ . Ovo nam pokazuje da  
operator  $\lambda I - A$  mora biti singularan.  
Naravno i drugom nje + to je još  
 $\det(\lambda I - A) = 0$   
Ovo je jednakošte u tzv. stepanj u  $\lambda$  i ima  
bar jedan korijen  $\lambda_0$ . Kako je  $\lambda_0 I - A$  singularan  
operator, postoji bar jedan vektor  $x_0 \neq 0$  takav  
da je  $(\lambda_0 I - A)x_0 = 0$  tj.  $A$  ima vlast. vrijed.  $\lambda_0$  i sl. vekt.  $x_0$

## Karakteristične vrijednosti i karakteristični vektori

(76)

Skalar  $\lambda \in \mathbb{F}$  zove se karakteristična vrijednost operatora  $A \in (X \rightarrow X)$ , ako postoji bar jedno  $x \in X, x \neq 0$  takvo da je  $Ax = \lambda x$ .  
Za takav vektor  $x$  kaže se da je karakteristični vektor operatora  $A$  i da pripada karakterističnoj vrijednosti  $\lambda$ .

\* ~~...~~

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora  $A$  zove se skupa svojstvenih vrijednosti  $\sigma(A)$  tog operatora (skup svih nula svojstvenog polinoma)

- Borel je poznat da je matrica

$$A_0 \lambda_0^{m-1} + A_1 \lambda_0^{m-2} + \dots + A_{m-2} \lambda_0 + A_{m-1}$$

različita od nule i da je svaki od nule različitih stupaca te matrice svojstveni vektor matrice  $A$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_0$ .

(vidi primjer 4. str. 243 S. turepa)  
(Karakteristični vektori)

Različitim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  operatora  $A$  pripadaju linearno nezavisni svojstveni vektori  $x_1, \dots, x_k$ .

# Elementarne transformacije linije ne mijenjaju rang

(46)

Pod elementarnim transformacijama jedne matrice smatraju se tri operacije:

1. Zamjena dvaju redaka ili stupaca
2. množenjem retka ili stupca brojem različitim od nule
3. Pribijanje nekog retka (stupca) pomnoženog brojem različitim od nule, nekome drugom retku (stupcu)

Imamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} & aa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ I \end{bmatrix} [A] \quad [A] [I^b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}b + a_{33} \end{bmatrix}$$

I stupac    III stupac

Kod operacije s retcima, matrica je s lijeve strane. Kod operacije s stupcima matrica je s desne strane.  $[I]$  je regularna (ima  $I^{-1}$ )

i-ti redak pomnožen s brojem  $a$

$$(H_i(a))^{-1} = H_i\left(\frac{1}{a}\right)$$

j-ti stupac pomnožen s brojem  $b$

$$(K_j(b))^{-1} = K_j\left(\frac{1}{b}\right)$$

Pomnožit i-ti redak s brojem  $a$  i dodati ga j-tom retku

$H_{ij}(a)$  - regularna operacija

Pomnožit i-ti stupac s brojem  $b$  i dodati ga j-tom stupcu

$K_{ij}(b)$  - regularna operacija

Problemi:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad ???$$

$$x = ?$$

$$\lambda = ?$$

$$A \cdot x = [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1 & 4x_2 & -2x_3 \\ -7x_1 & -6x_2 & 7x_3 \\ 4x_1 & 8x_2 & 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}$$

$$10x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \lambda x_1$$

$$-7x_1 - 6x_2 + 7x_3 = \lambda x_2$$

$$4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = \lambda x_3$$

$$\left. \begin{aligned} (10-\lambda)x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -7x_1 - (6+\lambda)x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + (4-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Homogjen sistem} \\ \text{linearni} \\ \text{jednadžbi} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 10-\lambda & 4 & -2 \\ -7 & -(6+\lambda) & 7 \\ 4 & 8 & (4-\lambda) \end{array} \right| = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{da bi imalo rješenje} \\ \text{mora biti jedinstveno} \\ \text{mora biti jednaka nuli} \end{array} \right.$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 - 64\lambda + 512 = 0$$

Rješenje je m:

$$\boxed{\lambda_1 = 8 \quad , \quad \lambda_2 = 8 \quad , \quad \lambda_3 = -8}$$

Primer: 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -7x_1 - 14x_2 + 7x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \text{ homogena}$$

Vidljivo je da je  $\det A = 0$  (A... neregularna)  
 Pošto je  $\det A = 0$  znači rang može 3  
 nego manje. Treba ga ispitati!

Rješenje je:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = -2x_2 + x_3$$

$$x = \begin{bmatrix} -2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Često je manipulirajući sa stupcima  
 jer treba u rješenju pronaći faktor  
 a lizirati je pomnoženjem varijabla  
 i treba ga podijeliti o tih faktorom.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -7 & -14 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \text{Sada se koriste} \\ \text{elementarne transformacije} \\ H_{12}(1) \text{ i } H_{13}(-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Rang je } 1$$

~~RAZLUČIVOST~~

$$A \cdot K_{ij}(b) \quad K_{13}(1), K_{12}(-2)$$

$$K_{ij}(0)$$

$$X \cdot A \cdot Y = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

regularni determinat

Invarijantni podprostori

i svojstvene vrijednosti

linearnog operatora

S. Kurera

linearni operator  $A$  prevodi vektore iz prostora  $X$  u vektore tog prostora.

Pri tome se može dogoditi da on neki vektor  $x$  prevede u vektor koji je kolinearan sa  $x$  ili općenitije, može se dogoditi da  $A$  vektore nekog podprostora  $X_0 \subseteq X$  prevodi u vektore tog podprostora  $A: X \rightarrow X$ .

Tako npr. rotacija oko  $z$  (aplikate) u trodimenzionalnom prostoru prevodi vektore prostora, ponovno u vektore prostora, ali pri tome vektori sadrže određite na aplikatu ( $os-z$ ) ponovno prelaze u vektore te sadrže. Obično gledamo da sadrže ostaje na mjestu, ona ostaje invarijantna (kao cilindar) obzirom na navedenu rotaciju.

Kažemo da je podprostor  $X_0 \subseteq X$  invarijantan u obzirom na linearni operator  $A: X \rightarrow X$  ako je:

$$AX_0 = \{Ax \in X; x \in X_0\} \subseteq X_0$$

tj. ako operator  $A$  podprostor  $X_0$  prevodi u njegov dio. Za takav podprostor kažemo da reducira operator  $A$ .

- Nul dimenzionalni podprostor je nul vektor
- Jednodimenzionalni podprostor su pravci kroz ishodište
- Dvodimenzionalni podprostori su ravni kroz ishodište
- Trodimenzionalni podprostori su ????

# kojstvene vrijednosti i svojstveni podprostori linearnog operatora

(81)

(H. 220)

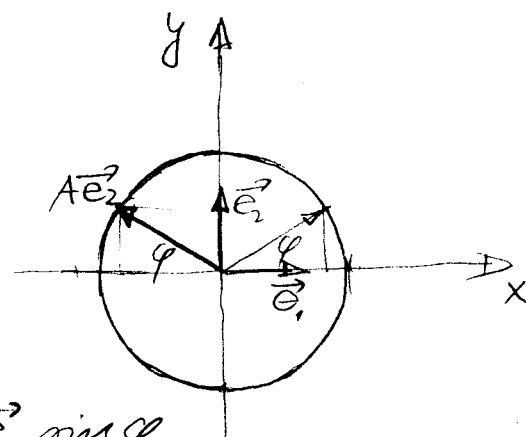
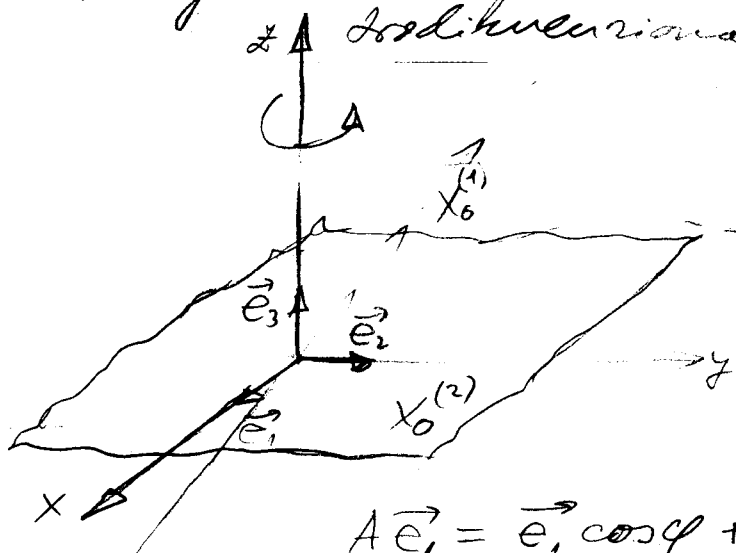
Existencija invarijantnih podprostora je vrlo važna i bilo bi neidealno kad bi operator  $A \in (X \rightarrow X)$  imao samo  $n$ -invarijantnih podprostora, kojih bi direktna suma bila  $X$ . U tom slučaju bi nam bilo odli podprostora bio jednodimenzionalan pa bi odgovarajuća krakodijagonalna matrica operatora  $A$  bila dijagonalna. Ako su nam dane  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektori koji razapiru spomenute podprostore, onda  $A \cdot e_k$  mora ponovno pasti u podprostor razapetac  $e_k$  tj.  $Ae_k$  mora biti kolinearan sa  $e_k$ . Duhle mora postojati skalar  $\lambda_k$  takav da je  $Ae_k = \lambda_k e_k$ . Operator  $A$  u bazi  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ima matricu

$$A(e) = [\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

U takvoj operator postoji baza u  $X$  takva da je  $A(e)$  dijagonalna matrica. Operator  $A$  prevodi vektor  $x$  u neki drugi vektor  $Ax$ , koji u općem slučaju nije kolinearan sa  $x$ . Vektori gore navedene baze su takvi da je  $A \cdot e$  kolinearan sa  $e$  odnosno je  $e$  neki od vektora baze  $e(e)$ , tj.  $Ae = \lambda e$ . Vektor  $e \neq 0$ , za koji postoji  $\lambda \in \Phi$  takvo da je  $Ae = \lambda e$  zove se **vektor svojstven** operatora  $A$ . Skalari  $\lambda \in \Phi$ , za koji  $\exists$  vektor  $e \neq 0$  takvi da je  $Ae = \lambda e$  zove se **kojstvene vrijednosti** operatora  $A$ . Ako je  $\lambda$  svojstvena vrijednost operatora  $A$ , onda skup svih  $x \in X$  sa svojstvom da je  $Ax = \lambda x$  obrazuje podprostor. Taj podprostor se zove **podprostor svojstven** operatora  $A$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ .

Principi: Rotacija oko osi  $z$  u  
tridimenzionalnom prostoru

(82)



$$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadano je:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ;  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \dot{+} B = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$(A \dot{+} B) \dot{+} C = \left[ \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \end{array} \right]$$

Kad li  $A \dot{+} B$  djelovala na neki vektor

$$A \dot{+} B = \left[ \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ \hline \end{array} \right]$$

Principi invarijantnosti prostora je:  $Ax = \lambda x$   
Pretpostavimo da postoji neki  $x$   $x \neq 0$

Postoji  $\lambda$

Ima li vektor  $\alpha$  koji je prostora matrice  $A$   
množi s  $\lambda$

$$A(\alpha \cdot x) = \alpha Ax = \alpha \cdot \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(83)

$$Ax = \lambda x$$

$$\lambda x - Ax = 0$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$

jez ne nujno imati inverz!

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 - 64\lambda + 512$$

Ovo je karakteristični  
ili svojstveni polinom operatora:

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 - 64\lambda + 512 = 0$$

$$|\lambda_1 = \lambda_2 = 8, \lambda_3 = -8$$

Ovo su karakteristične vrednosti operatora  
 $(-8I - A)x = 0$

$Ax = -8x$  Vektor  $x$  koji se dobije, zove se  
karakteristični vektor karakteristične vrednosti.

$$\begin{bmatrix} -18 & -4 & 2 \\ 7 & -14 & -7 \\ -4 & -8 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vidi str. 78

$$-18x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$7x_1 - 14x_2 - 7x_3 = 0$$

$$-4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = 0$$

} homogeni sustav ina  
 $\det = 0$

Rang je manji od 3.

$$-9x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -9x_1 - 2x_2 = -x_3$$

$$x_1 - 2x_2 = x_3$$

Za  $\lambda_3 = -8$  dobije se

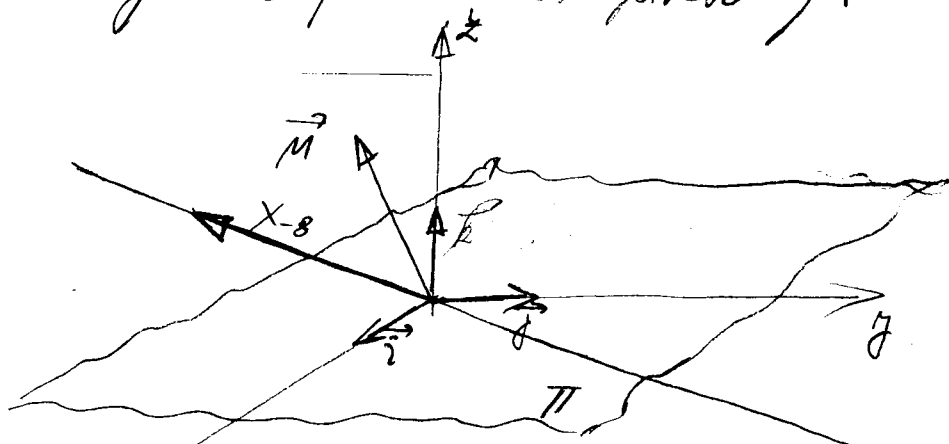
Za  $\lambda_{1,2} = +8$  dobije se

$$x_{-8} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \{$$

$$x_{+8} = \begin{bmatrix} -2\{2 + \{3 \\ \{2 \\ \{3 \end{bmatrix}$$

# Geometrijske interpretacije

(84)



$$\begin{aligned}x &= -2y + z \\x + 2y - z &= 0 \\ \vec{m} &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

$x$  - neki vektor na zgorajem pravcu se množi s  $(-8)$

$$\vec{a} = X_8^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = X_8^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{c} = x = -8$$

$$A \cdot \vec{a} = 8\vec{a}$$

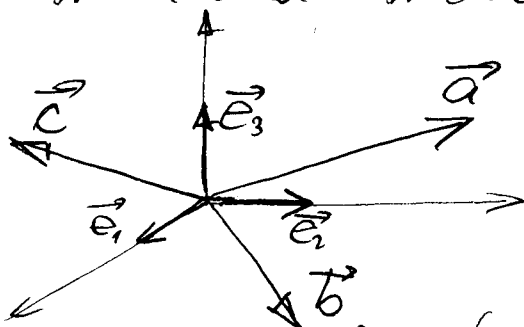
$$A \cdot \vec{b} = 8\vec{b}$$

$$A \cdot \vec{c} = -8\vec{c}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3$$

Linearni operator u lošim koordinatnim sustavima ima loše koordinatne matrice. Zato treba odabrati dobre koordinatni sustavi.



$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Gdje su matrice (A i B) iste, ali u različitim koordinatnim sustavima

$$A \approx B$$

$$T^{-1}AT = B$$

T... matrica prijelaza iz koordinatnog sustava  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  u koordinatni sustav  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

# Hamilton - Cayley - es teorem

(85)

Alto je  $X$   $n$ -dimensionalni vektorski prostor nad tijelom  $\Phi$  i  $A: X \rightarrow X$  linearni operator, onda je  $A$  nula svoj svojstvenog polinoma tj. vrijedi operatorska jednakost.

$$\Phi(A) = 0$$

$$\Phi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n$$

$$\Phi(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0$$

Dokaz:

$$B = \lambda I \cdot A$$

$$\tilde{B}^* = (\lambda I \cdot A)^*$$

$$B \cdot \tilde{B}^* = (\det B) I = \Phi(\lambda) \cdot I$$

$$A \cdot \tilde{A}^* = (\det A) I$$

$$A \cdot \frac{\tilde{A}^*}{\det A} = I$$

Posmatte otkazi!

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^*}{\det A}$$

$$\tilde{B}^* = D_0 + D_1 \lambda + D_2 \lambda^2 + \dots + D_{n-1} \lambda^{n-1}$$

$$B \cdot \tilde{B}^* = (\lambda I - A)(D_0 + D_1 \lambda + D_2 \lambda^2 + \dots + D_{n-1} \lambda^{n-1}) =$$

$$= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n) I$$

$$-AD_0 = a_0 I$$

$$AD_0 - AD_1 = a_1 I \quad | \cdot A$$

$$A^2 D_0 - A^2 D_1 - A^2 D_2 = a_2 I \quad | \cdot A^2$$

$$A^{n-2} D_1 - A^{n-2} D_2 = a_{n-1} I \quad | \cdot A^{n-1}$$

$$D_{n-1} = a_n I \quad | A^n$$

+

$$0 = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$$

a ovo je i trebalo dokazati!

$A^*$  ... algebarski komplement  $A_{ik} = A_{ki}$

Teorem: Neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$   
 međusobno različite karakteristične  
 vrijednosti matrice  $A$  i neka su  
 pripadajući vektori:  $x_1, x_2, \dots, x_p$   
 linearno nezavisni vektori

$x_1 \neq 0$  tvrdnja je istinita za  $p=1$

Dokaz:

Neka je tvrdnja istinita za  $m$ -vektora  
 znači da su  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearno nezavisni  
 dodajmo vektorima:  $x_{m+1}$

$x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$

Treba dokazati da su i dodani vektori  
 linearno nezavisni.

Dokaz se provodi kontradikcijom!

- Postoji vektor:  $x_{m+1}$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k = 0$$

zavisni i misli mi  $\alpha_k = 0$ ?

- Ovo treba oporiti (da ova tvrdnja ne stoji)

Na osnovu treba primijeniti operator  $A$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k A x_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k x_k = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1} = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k = 0 \quad | \cdot \lambda_{m+1}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k x_k = 0$$

$$\lambda_{m+1} \alpha_1 x_1 + \lambda_{m+1} \alpha_2 x_2 + \dots + \lambda_{m+1} \alpha_m x_m + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} x_{m+1} = 0 \quad \textcircled{2}$$

Kad se od  $\textcircled{2}$  oduzme  $\textcircled{1}$  dobije se

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k x_k = 0$$

Ova jednakost je kontradiktorna!

Pretpostavka teorema je da su članovi (87)  
u razgledanu različiti.

$(\lambda_k - \lambda_{m+1}) \dots$  brojevi različiti od nule

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k x_k = 0$$

Lijepo se o čisto pojedinačno baranje jednog  
koeficijenta različit od nule.

$x_1, x_2, \dots, x_m$  su linearno nezavisni.  
Zbog ove linearne nezavisnosti slijedi da  
su svi koeficijenti

$$(\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

a to ne bi trebalo biti individualno

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k = 0 \quad (\text{početna pretpostavka})$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0$$

Dakle opet pretpostavka da je:  $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k = 0$   
tj. svi su nezavisni.

Imamo matriču  $A(n, n)$

Nji pripadajo karakteristične vrijednosti

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( različite karakteristične vrijednosti )

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$x_1 \quad x_2 \quad x_n$  (linearno nezavisni vektori)

$$A x_i = \lambda_i x_i$$

Ali se u vektorskom prostoru  $X$  da biti  
baza  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (linearno nezavisni  
vektori) onda se za svaki vektor  
vektorskog prostora da do napisati:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad x \in X$$

$$A x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$A x_2 = \lambda_2 x_2$$

-----

$$A x_n = \lambda_n x_n$$

Matrica se dobije tako da se pogleda  
kako operator djeluje na bazu!

$$A(x_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(dijagonalna forma)

$$A(x_i) = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n]$$

vidi str. 30  
ovdje!

Teorem: Karakteristični brojevi  
realne simetrične matrice su  
realni brojevi.

Simetrična matrica  $[a_{ij}] = [a_{ji}] = A$

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \\ = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

Rješenje ove jednačine su realni brojevi!

Dokaz: se provodi kontradikcijom.

Pretpostavimo da su brojevi kompleksni:

$$\lambda = a + ib$$

Treba dokazati da je  $b = 0$ !

Za matricu  $A$  simetrične matrica je  $\tilde{A}$   
... transponirano

$$B = ((a+ib)I - A)$$

Ali li  $\lambda_1 = a+ib$  bilo mjere je on da li  
mjereno je moralo biti i  $\lambda_2 = a-ib$

Stavimo:

$$B = ((a+ib)I - A)((a-ib)I - A) = (aI - A)^2 + b^2 I$$

$$(aI - A)^2 + b^2 I = (aI - A)(aI - A) + b^2 I = A^2 + bA + Ab + b^2 I$$

$B$  je realna jer je  $B = (aI - A)^2 + b^2 I$

U isto vrijeme je po pretpostavci:

$$B = ((a+ib)I - A)((a-ib)I - A)$$

$B$  je također singularna

$$B \cdot X = 0 \quad \text{za } X \neq 0$$

Regularna matrica nije nula n nula.

Ali neka matrica nije nekoga to nije  
nula n nula znači da je ona  
singularna matrica.

$$Bx = 0, \quad x \neq 0$$

(90)

$$\tilde{x} B \cdot x = \tilde{x} ((aI - A)^2 + b^2 I) x$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\tilde{x} B x = \tilde{x} (aI - A) \tilde{x} + b^2 x^2 x =$$

$A$  je simetrična pa je i  $(aI - A)$  simetrična matrica

$$= \tilde{x} (aI - A)^T (aI - A) x + b^2 x^2 x = \widetilde{(aI - A)x} (aI - A)x + b^2 \tilde{x} x$$

Vektor  $(aI - A)x$  je realan!

$$[\text{vektor}] \cdot \begin{bmatrix} v \\ e \\ t \\ o \\ r \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{(aI - A)x} (aI - A)x \geq 0$$

$$\tilde{x} x > 0 \Rightarrow b = 0$$

Potrebno je  $\tilde{x} \cdot x$  pozitivan suficijentno da  $b$  mora biti nula, a to znači da su sve karakteristične vrijednosti realne.

Teorem: Matrica  $A$  je realna i simetrična (94)

$$A = \tilde{A} = [a_{ij}] = [a_{ji}]$$

$\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su karakteristične vrijednosti

$x_1$  i  $x_2$  su pripadajući vlastiti vektori

Trećija teorema:

$$\tilde{x}_1 \cdot x_2 = 0$$

znači da su karakteristični vektori realne simetrične matrice međusobno okomiti.

Treba dokazati ove tvrdnje:

$$\tilde{x}_2 \cdot x_1 = \tilde{x}_1 \cdot x_2 = 0$$

Dokaz:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad | \cdot \tilde{x}_2$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad | \cdot \tilde{x}_1$$

$$\tilde{x}_2 Ax_1 = \lambda_1 \tilde{x}_2 x_1$$

$$\tilde{x}_1 Ax_2 = \lambda_2 \tilde{x}_1 x_2$$

$A$  je simetrična pa se može pisati:

$$(\tilde{x}_2 Ax_1)^T = (\tilde{x}_1 \tilde{A} x_2) = \tilde{x}_1 Ax_2 = \lambda_2 \tilde{x}_1 x_2$$

$$\tilde{x}_2 Ax_1 - \tilde{x}_1 Ax_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{x}_2 x_1$$

$$(1, n) (n, n) (n, 1)$$

$$(1, n) (n, 1)$$

$$(1, 1)$$

... a ovo je broj ?

$$\tilde{x}_2 Ax_1 - \tilde{x}_1 Ax_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{x}_2 x_1 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\boxed{\tilde{x}_2 \cdot x_1 = 0}$$

a to je trebalo dokazati !

## Skalarni produkt

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \in \mathbb{R}$$

$X$  ... vektorski prostor

$$X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Nova oznaka za skalarni produkt?

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Prejeto:

$$1. \langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle$$

Ste simetrični označevanja li ho:

$$(x_1 + x_2) y = x_1 y + x_2 y$$

$$2. \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle \quad (\text{vektorski prostor nad } \mathbb{R})$$

$$3. \langle \lambda x | y \rangle = \langle x | \lambda y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle \quad ( \text{---} )$$

$$4. \langle x | x \rangle \geq 0, \quad \langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$$

$$1. \langle x | x \rangle = |x|^2$$

$$|x| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \quad \dots \text{definira vektor } x$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle x | y \rangle}{\sqrt{\langle x | x \rangle} \sqrt{\langle y | y \rangle}}$$

Ovo so do sada navedeno treba staviti u definiciju:

Definicija: Neka je  $X$  v.p. nad  $\mathbb{R}$  (93)

Funkcija  $\langle 1 \rangle$ : lija preslikava  $X \times X \in \mathbb{R}$   
površinu skalarni produkt od kojih  
koje: 1., 2., 3., 4. ili u ostalim oblicima

1.  $F(x_1 + x_2, y) = F(x_1, y) + F(x_2, y)$

2.  $F(x, y) = F(y, x)$

3.  $F(\lambda x, y) = F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$

4.  $F(x, x) \geq 0$ ;  $F(x, x) = 0 \iff x = 0$

Vektorski prostor  $X$  zajedno s  $\langle 1 \rangle$

daje se Euklidovski prostor  $(X, \langle 1 \rangle)$  nad  
poljem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(X, \langle 1 \rangle)$  ... komutativna grupa

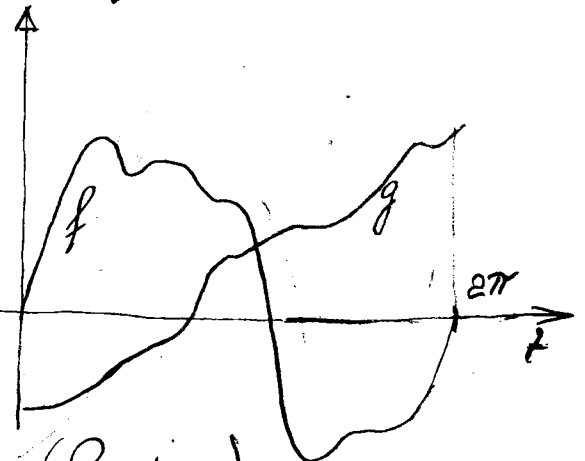
Primer:

Skup svih ograničenih  
neprekidnih funkcija  
sačinjava grupu  $(C[a, 2\pi], +)$   
lija je vektorski prostor

$(C[a, 2\pi], \langle 1 \rangle)$  nad poljem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

Ludovikova su dva čitavi broja



(+?)

???

Vidi  
definiciju

Primer:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$$

(94)

$\vec{a} \cdot \vec{b} \dots$  standardni skalarni produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 4(-3) = 2 - 12 = -10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(2+4)(2+4)} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 4(-3) = -10$$

$$(1, 2) \cdot (2, 1)$$

$$\underbrace{\quad}_{(1,1)}$$

$$(1, 1)$$

$$\tilde{\vec{a}} \cdot \vec{b} = \tilde{\vec{a}}^T \vec{b}$$

$\tilde{\vec{a}} \dots$  vektor  $\vec{a}$  pisan kao stupac redak

$$\tilde{\vec{a}}^T \vec{b} = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \quad ???$$

Isto je moguće pisati ako je  $A = I$

$$1. \quad (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \cdot Ay = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) Ay = \tilde{x}_1 Ay + \tilde{x}_2 Ay = \\ = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle = \langle x_1 + x_2 | y \rangle$$

$$2. \quad \tilde{x} Ay = \tilde{y} Ax \quad ???$$

$$\underbrace{\tilde{x} Ay}_{\text{ovo je broj}} = \tilde{y} \tilde{A} \tilde{x} = \tilde{y} \tilde{A} x = (\text{Pitamo se kada je ovo jednako}) \\ = \tilde{y} Ax$$

Odgovor je: naravno ako je  $A = \tilde{A}$  tj. ako je  $A$  simetrična matrica.

$$3. \quad \tilde{\lambda} x Ay = \lambda \tilde{x} Ay = \tilde{x} A \lambda y = \tilde{x} \lambda Ay = \dots$$

$$4. \quad \tilde{x} Ax \geq 0 \quad ???$$

Treba odgovoriti što je ovo?

Vidi primeri dalje!

Primer:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}_{a_{12}=a_{21} \dots \text{simetrična matrika}} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Vidi se kvadratna forma u varijabli  $x_1$  i  $x_2$

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \geq 0$$

Općenito:  $a_{ii}x_i^2 + 2a_{ij}x_ix_j + a_{jj}x_j^2$

Kvadratna forma u  $n$ -varijabli izgleda:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = Q(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_nx_n$$

Očito je kod kvadratne forme  $a_{ij} = a_{ji}$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} A_{(n,n)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \tilde{x} \cdot A \cdot x$$

4.  $\tilde{x} A x \geq 0 \dots$  dakle, ovo je kvadratna forma  $Q$   
 $Q \geq 0$  ??? (kada)

Ovo je zadovoljeno ako je:

1.  $a_{11} > 0$

2.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

3.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$

n.  $|\text{determinanta cijele matrice}| > 0$

Dakle:

~~matrica~~ je ~~pozitivno definitna~~

~~matrica~~ vrijedi:

1. ~~matrica~~

2. ~~matrica~~

Primjer:  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$   
 $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$   $a_{11} > 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -27 \end{bmatrix} = \dots$

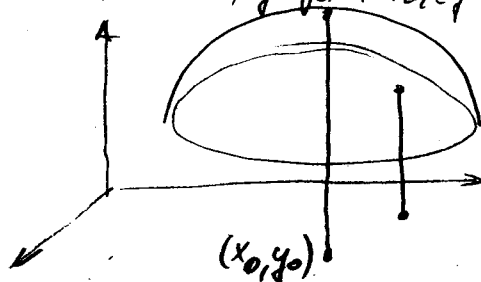
Sada je sve drugačije (različito) od npr. primjera prije uvođenja, jer je  $A$  simetrična

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right] + \dots$$

$$[a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2] \geq 0$$

Ovo je kvadratna forma!

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2]$$

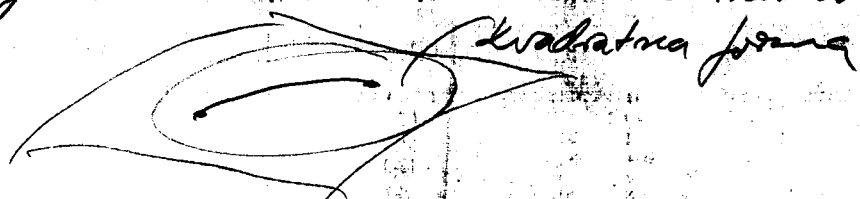


Duljina luka:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Ovo je kvadratna forma!

U ortogonalnom (kartezijevom) koordinatnom sustavu vrijedi gornja relacija. U neortogonalnom koordinatnom sustavu to ne vrijedi!



Kod invarijantnog i kovarijantnog skalarnog produkta i obrnuto.

## Norma i. definira

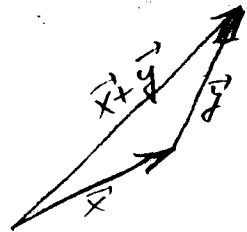
(94)

Norma vektora  $x$ ;

1.  $\|x\| > 0 \quad x=0 \Leftrightarrow \|x\|=0$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

3.  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$



Definicija: Vektorski prostor  $X$  je normiran ako se može definirati funkcija sa svojstvima 1. 2. 3.

✓ Svaki euklidski prostor je normiran!

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

Ovo je dobra norma, jer zadovoljava  
1. 2. 3.

## Norma matrica

4. Lupa i. m. m. m.

Bitne su u računanju

FINE

$$G = \{a, b, c, \dots\} \neq \emptyset$$

①

1.  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  asosiy qonun
2.  $a \circ e = a$  jëdini element
3.  $a \circ a^{-1} = e$  simetriya (reverz)
4.  $a \circ b = b \circ a$  komutativlik

Primer:  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$   
 $([a, b], +)$ ,  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ,  $(G, \cdot)$ ,  $(\varphi, +)$ ,  
 $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ,  $(\mathbb{Z}_n^2, \oplus)$  i t.d.

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$  me eina grup!

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \right\} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  notatziya  
 $F[a, b] = \{f, g, h, \dots\}$  funksiyalar  
 $G = \{g_1, \dots, g_n\} = \{1, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{R} = \{Q \text{ i arifmetik kontruktiv real q bog'lar, real}\}$

$$\mathbb{Q}^+ = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad i = \sqrt{-1}$$

$\mathbb{R}^n = \{\text{potentsiyalar real q bog'lar}\}$

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \quad x \equiv_n y \quad 0, 1, 2, \dots, n-1 \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}_n^2 = \{(a, b)\} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$\oplus$  - ortogonal qurilma

$\mathbb{R}$  - aditiv Abelskiy grup  
 har 2 xil elementlar u kuzgij  
 asosiy usulda har element  
 $a, b \in \mathbb{R}$  qidirmish jëdan jëdini element  
 $a \cdot b$  - pr forme uyidi:

1.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  asosiy qonun
2.  $a \cdot (b + c) = ab + ac$  distributivlik
3.  $(b + c) \cdot a = ba + ca$  komutativlik
4.  $a \cdot b = b \cdot a$  komutativlik

Neutrit element q bog'lar jëdan

Primer:  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$   
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ... o'ziga o'ziga

je potek za razredom  
 da pri vsaki množici različnih elementov  
 določimo grupno  $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$  in odnosu  
 na množenje. Jedinični element je 1.  
 je potek  $(\Phi, +, \cdot)$  ako  $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$   
 določimo komutativno grupno in odnosu na  
 množenje. Velja:

$$\Phi \neq \emptyset$$

$$0, 1 \in \Phi$$

1.  $(\Phi, +)$  ... komutativna grupa

2.  $(\Phi \setminus \{0\}, \cdot)$  ... -1- -1-

3.  $x(y+z) = xy + xz$  distribucija

Primeri polja so:  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ,  
 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$

$$\mathbb{F}_2 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$\odot$  ... ortogonalni produkt

je aditivna Abelova  
 grupa  $(X, +)$   $X = \{x, y, \dots\}$  nad  
 poljem  $(\Phi, +, \cdot)$   $\Phi = \{\alpha, \beta, \dots\}$  ako velja  
 funkcija:  $\Phi \times X \rightarrow X$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \in X$$

i ta funkcija velja pravila:

$$1. \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$2. (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$3. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$4. 1 \cdot x = x$$

Element v.p. skalarne vektorskega?

Kada se:  $X$  je v.p. nad  $\Phi$

Operacije "+" in "·" ne izvedemo na v.p.  $X$ ?

$\eta$ :  $X$  je skalarno vektorski na  $\Phi$  določimo

$\rightarrow$  znači jedino preslikovanje

$\mapsto$  znači pridruževanje

# Primeri vektorskih prostora:

(3)

$$(R, +) \text{ mod } R$$

$$(C, +) \text{ mod } C$$

$$(C, +) \text{ mod } R$$

$$(C, +) \text{ mod } Q$$

$$(R^+, +) \text{ mod } R$$

Sabir k.g. f. v.p. mod drugim soborom

$$(F_{[a,b]}, +) \text{ mod } R$$

$$(C_{[a,b]}^{(p)}, +) \text{ mod } R$$

$$(R^n, +) \text{ mod } R$$

$$(N, +) \text{ mod } R$$

$$(P_n(x), +) \text{ mod } R$$

$$(P(z), +) \text{ mod } R$$

$P(z)$ ... skup polinoma

$$X(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

F... polovi

- Vektorski prostor  $X$  ima dimenziju

$$\dim X = m \in N$$

1. Ako ima  $m$ -linearno nezavisnih vektora  $e_1, e_2, \dots, e_m \in X$

2. Takvih da je  $\forall x \in X$  linearna kombinacija

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in R$$

$e_1, e_2, \dots, e_m$  su baza u v.p.  $X$

- Vektorski prostor  $Y$  ima dimenziju

$$\dim Y = m \in N$$

1. Ako ima  $m$ -linearno nezavisnih

2. vektora  $f_1, f_2, \dots, f_m \in Y$

3. Takvih da je  $\forall y \in Y$  linearna kombinacija

$$y = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j \quad \beta_j \in R$$

$f_1, f_2, \dots, f_m$  su baza u v.p.  $Y$

- Ako v.p.  $Z$  nema dimenziju

$$\text{znači da je } \dim Z = \infty$$

$$X_0 \subseteq X$$

(4)

$X_0$  je v. pp od  $X$  ako sadrži  
linearnu kombinaciju:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in X_0$$

$$\begin{aligned} x_0 &\neq 0 \\ x_1, x_2 &\in X_0 \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{F} \end{aligned}$$

kad god su sadrži vektore  $x_1$  i  $x_2$

Postoje trivijalni podprostori:

a) Nul prostor

b)  $E^3$  (euklidski) p. prostor

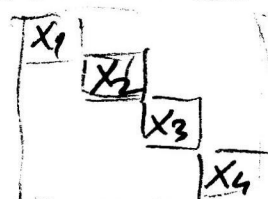
nedrivenjivi podprostori

a) Prava kroz ishodište

b) Ravnina kroz ishodište

Direktna suma znači jedinstveno  
podeljivanje podprostora

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$



4. Ako je  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \neq 0$  znači da su  
vektori  $x_i$  linearno nezavisni tj.  
da je barem jedan  $\alpha_i \neq 0$   
i pripadni vektor  $x_i$  je linearna  
kombinacija ostalih:

$$x_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} x_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} x_m$$

(Linearni) operatori su linearne  
funkcije definisane na vektorskim  
prostorima i primaju ujednačen  
vektorskim prostorima.

Primeri:

$$\alpha \cdot x$$

$$\alpha \in \mathbb{F}$$

$$x \in X$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

rotacija za kut  $\varphi$

translacija

projiciranje

birnebrige (osna)

kornotebrje

deniriranje

integriranje

Operator  $A: X \rightarrow Y$  ili  $X \xrightarrow{A} Y$  (5)  
je linearni operator ako vrijedi:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

$$\alpha, \beta \in \Phi \quad x, y \in X$$

$X$  i  $Y$  su v.p. nad  $\Phi$

linearni operatori su linearna preslikavanja.  
Operator je dobar ako nemije nul-prostor  
niti nula.

- Skup svih l.o. sa  $X$  u  $Y$  obilježuje v.p.  
 $\dim(X \rightarrow Y) = \dim X \cdot \dim Y$

- Elementi v.p.  $(X \rightarrow Y)$  su operatori  
(funkcije) pa je struktura tog v.p.  
odgovarajuća od strukture pojedinog v.p.

- Ako je  $Y = X$  nema problema  
u kompoziciji dvaju linearnih operatora  
u novom v.p.  $(X \rightarrow X)$  njegove  
elemente uvijek možemo pomnožiti  
Ako u tom novom v.p.  $(X \rightarrow X)$  vrijedi  
nad  $\Phi$

$$X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y \in X$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

tako v.p. zove se ~~algebra~~

- Ako vrijedi:

$$\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \dots \text{linearno}$$

tako v.p. zove se ~~algebra~~

- Najjednostavnija linearna algebra  
u polinomima:

Primjer:  $(P(T), +)$  nad  $R$

- Ako vrijedi:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

to je

- Ako imamo

$$x \cdot I = I \cdot x = x$$

$I$  je ~~identitet~~

- Ako je:

$$6. (x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$$

to je ~~asocijativnost~~

Primjer: Eks produkt vektora

9. Matrice su pravi primjeri linearnih algebre  
Matrice nisu komutativna algebra  
Svaka konačna dimenzionalna algebra  
je izomorfna s nekom algebrom matrica  
 $\dim A = \dim X \cdot \dim Y$

10. Za linearna preslikavanja je potrebno  
u vektorskim prostorima  $X$  i  $Y$  definirati  
vektore baze s kojima možemo  
izraziti svaki vektor u tim prostorima,  
a među prostorima potrebno je  
definirati linearni operator.

Za to znači kako neki linearni operator  
djeluje na vektor  $x$  dobivamo je znajući  
kako on djeluje na vektore baze

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j$$

$$x \in X, \dim X = m$$

$$e_1, \dots, e_m \text{ baza u } X$$

$$y \in Y, \dim Y = n$$

$$f_1, \dots, f_n$$

$$A: X \rightarrow Y$$

$$y = A(x) = A \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^m A(\alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A(e_i)$$

$$f_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1m} e_m$$

$$f_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2m} e_m$$

$$\vdots$$

$$f_m = \alpha_{m1} e_1 + \alpha_{m2} e_2 + \dots + \alpha_{mm} e_m$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

(7)

$$\begin{bmatrix} A_{11}e_1 & \dots & A_{1n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}e_1 & \dots & A_{mn}e_n \end{bmatrix} = A(e, f)$$

ovo je matrica

Primjeri: - rotacija ravine za  $45^\circ$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- rotacija za  $45^\circ$  u osi  $z$

- simetrija oko osi  $x$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M. - Skup svih linearnih operatora je v.p.  $\dim(m \cdot n)$

• Preslikavanje  $X \rightarrow X$  odgovara kvadratnoj matrici

- Baza linearno nezavisnih vektora  $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\} \in Y$  je dimenzija slike. To je tzv. rang operatora (matrice).

- Sistem  $A_{(m,n)}x = b$  ima rješenje ako je  $\det A \neq 0$  odnosno ako se odgovarajućim stupca  $b$  ne povini rang.

- Dva linearna operatora su jednaka ako se podudaraju u bazi

$$A = B \iff Ae_i = Be_i \quad i=1, \dots, n$$

• Operator  $A$  je regularan  $\iff$

$$Ax = 0 \implies x = 0$$

- Operator  $A$  je singularan ako

$$\exists x \neq 0 : Ax = 0$$

- Ako je  $X$  kompleksan v.p. i  $A \in (X \rightarrow X)$  ⑧  
 $\exists \lambda$  i  $\exists x \in X$   $x \neq 0$

sa svojstvom da je skup svih  $x$

$$Ax = \lambda x$$

karakterističan podprostor

$$(\lambda I - A)x = 0$$

- Operator  $(\lambda I - A)$  je singularan  $\Leftrightarrow$   
 $\det(\lambda I - A) = 0$

12. Ovo je jednadžba u-taj stupnja  $n$  i ima  $n$  različitih rešenja. Bilo koje dva različitih karakteristična polinoma  $\lambda_0 \dots$  karakterističnog svojstva od  $A$   $x \dots$  karakteristični vektor od  $A$

- Karakteristični brojevi realne simetrične matrice su realni brojevi.
- Karakteristični vektori realne simetrične matrice su međusobno okomiti.

■ Neka je  $X$  v.p. nad  $\mathbb{R}$ .

Funkcija  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  koja preslikava  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  moramo  $\dots$  tako nje

$$1. \langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle$$

$$2. \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$$

$$3. \langle \lambda x | y \rangle = \langle x | \lambda y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$$

$$4. \langle x | x \rangle \geq 0 \quad \langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x | x \rangle = \|x\|^2$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle x | y \rangle}{\sqrt{\langle x | x \rangle} \sqrt{\langle y | y \rangle}}$$

$$X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a | b \rangle \in \mathbb{R}$$

Svojstva  $\dots$

$$1. \|x\| > 0$$

$$x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Vektorski prostor  $X$  zajedno

(9)

$A <1>$  zove se Euklidovski v.p.

$(X, <1>)$  nad poljem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(X, <1>)$  je hermitijska grupa  
Edinako kod skalarnog produkta  
vektora opisati o matricnim formama  
da li to isto ostvarimo moramo  
najprije transponirati prvi vektor  
Kroz to operator  $<1>$  stvaramo  
kvadratični operator  $A$  čiji je rezultat  
preslikavanja je  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix}$

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \vec{a}^T A \cdot \vec{b} \iff A = I$$

Operator  $A$  mora zadovoljiti točke 1.-4.  
To je moguće ako je:

1.  $A = A^T$  tj.  $A$  je simetrična matrica

2.  $Q_A \geq 0$   $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$   
2. kvadratna forma

Kvadratna forma je veća od nule  
ako su sve subdeterminante  
determinante cijele matrice veće  
od nule.

$\Phi$

$X +$

$$X \times X \rightarrow \mathcal{R}$$

1.  $\langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle$

2.  $\langle x_2 | y \rangle = \langle y | x_2 \rangle$

3.  $\langle x | x \rangle \geq 0$  and  $\langle x | x \rangle = 0$   
 $x = 0$